

DEC 30 1926

1926

Nr. 24

PHYSICAL ROOM
LIBRARY
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,
P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 81 HEFT 8
DER GANZEN REIHE 386. BANDES 8. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT VIER TAFELN



LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1926 erscheinen die Bände 79, 80 und 81 à 8 Hefte. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 20.— zuzüglich Rm. —.80 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 1.60 für das Ausland.

Redaktionsschluß am 27. November 1926.

Inhalt

| | Seite |
|--|-------|
| 1. Wolfgang Leo. Über ausgewählte Gebiete des Heliumspektrums. (Hierzu Tafel V bis VII.) | 757 |
| 2. Theodor Sexl. Zur Theorie der Radiometerwirkungen II | 800 |
| 3. R. Frerichs. Intensitätsmessungen an Multipletts. (Hierzu Tafel VIII.) | 807 |
| 4. Aurel Wintner. Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum. (Zweite Mitteilung.) | 846 |
| 5. Th. Sexl. Zur gastheoretischen Begründung der Stokes-Cunningham'schen Formel. | 855 |
| 6. Ludwig Schiller. Bemerkung zu Hrn. Knodels Arbeit: „Über die Gasströmung in Röhren und den Luftwiderstand von Kugeln“ | 866 |
| 7. Friedrich Kottler. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen | 869 |

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Kolberger Straße 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 81

1. *Über ausgewählte Gebiete des Heliumspektrums;* *von Wolfgang Leo*

(Dissertation Göttingen 1926)

(Hierzu Tafel V bis VII)

I.

1. Veranlassung und Gegenstand der vorliegenden Arbeit

Helium als wasserstoffähnlichstes Element ist für die Atomtheorie seit langem von besonderer Bedeutung. Seit Goldstein¹⁾ im Jahre 1913 ein Bandenspektrum des Helium entdeckte, das zunächst den Charakter eines Viellinienspektrums zeigte, wurde die Analogie mit dem Wasserstoffspektrum immer deutlicher. Dieses Bandenspektrum wurde sogar, ebenso wie das Fowlersche Heliumspektrum längere Zeit hindurch für ein Wasserstoffspektrum gehalten, bis es gelang, beide eindeutig dem Helium zuzuordnen.

Die Serienspektren der beiden Elemente zeigten so nahe Verwandtschaft, daß die Feinstrukturen des einen durch einfache Multiplikation mit rationalen Konstanten auf die des anderen hinübergerechnet werden konnten. So konnte Paschen²⁾ im Jahre 1916 die Feinstrukturen des Fowlerschen Heliumspektrums auf Grund der Sommerfeldschen Theorie in einfacher Weise auf die Dublettaufspaltungen der Wasserstoff-Balmerserie zurückführen.

Diese letztere Beziehung führte jedoch nach den an Wasserstoff direkt vorgenommenen Messungen zu allerhand Verwicklungen und Schwierigkeiten, so daß hier offenbar noch nähere Einzelheiten zu klären blieben; es schien also wichtig, die Linien der Fowlerserie erneut bei großer Dispersion zu untersuchen und gleichzeitig die Zusammenhänge des Fowlerspektrums mit dem Bandenspektrum zu studieren, da sich zeigte, daß beide Spektren bei höheren Stromdichten immer gemeinsam auftreten. Schließlich bot auch das Bandenspektrum selbst

1) E. Goldstein, Verh. D. Phys. Ges. 15. S. 402. 1913.

2) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50. S. 901. 1916.

bei seinem außerordentlichen Linienreichtum trotz der eingehenden, in den letzten Jahren veröffentlichten Untersuchungen von Curtis¹⁾ Material zu neuen Aufschlüssen über den molekularen Träger dieses Spektrums.

Auf freundliche Anregung von Hrn. Prof. Dr. E. Gehrcke hin bin ich daher diesen Fragen näher nachgegangen; die vorliegende Arbeit beschäftigt sich also im wesentlichen mit den Linien des ionisierten Heliums, sowie mit einigen ausgewählten Gebieten des Heliumbandenspektrums.

2. Allgemeines über benutzte Apparatur

a) Gitter

Für die Zwecke dieser Untersuchung, die sowohl im Bandenspektrum wie in der Feinstruktur der Serienlinien sehr große Dispersion erforderte, stand mir das große 6,5-m-Rowlandgitter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zur Verfügung, dessen Auflösung und Lichtstärke hinreichend ist, um Messungen an ihm allen anderen Untersuchungsmethoden vorzuziehen. Soweit es sich um die sehr kleinen Gebilde der Feinstrukturen handelte, hätte man auch an eine Untersuchung am Stufengitter denken können. Aber Paschen²⁾ hat bereits darauf hingewiesen, daß die Bilder der Liniengruppen durch Überlagerungen äußerst verwickelt werden, so daß eine Klärung des Gruppenbildes wieder sehr erschwert wird. Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit bot außerdem das Konkavgitter vor dem Stufengitter noch den besonderen Vorteil, daß es nicht nur eine jeweils untersuchte Spektrallinie oder Liniengruppe, sondern einen mehr oder minder breiten Spektralbereich zu beiden Seiten zu übersehen gestattet, was besonders für die gleichzeitige Beobachtung von Serienlinien und breiteren Bandengebieten von Wichtigkeit war.

Die feineren Messungen wurden ausschließlich in der zweiten Gitterordnung vorgenommen. Das benutzte Gitter hat hier bereits eine photographische Dispersion von 0,97 ÅE. pro Millimeter der Platte. Höhere Ordnungen anzuwenden, schien weder nötig noch ratsam, weil die Lichtstärke der verwendeten Licht-

1) W. E. Curtis, Proc. Roy. Soc. 101. S. 38.1922; 103. S. 315. 1923; 108. S. 513. 1925.

2) a. a. O. Anm. 2, S. 757.

quellen ohnehin gering war, und bei übertrieben langdauernden Expositionen Fehler infolge von Druck- oder Temperaturänderungen zu befürchten waren.

Die zu untersuchenden Objekte brachten teilweise die Notwendigkeit langer Dauerexpositionen mit sich. Die Gitteraufstellung¹⁾ hat diesen Anforderungen in jeder Weise genügt. Temperaturmessungen im Gitterraum ergaben bei erforderlicher Vorsicht eine Temperaturkonstanz innerhalb weniger Zehntelgrad über eine Woche, so daß auch Aufnahmen über 3 Tage unbedenklich vorgenommen werden konnten.

Es war bequem, gleichzeitig mit den Aufnahmen großer Dispersion Übersichtsaufnahmen in erster Gitterordnung zu erhalten. Die wertvollen Lichtquellen, die im allgemeinen nur kurze Lebensdauer haben, wurden auf diese Weise besser ausgenutzt. Hierzu wurde die 2 m lange, der Kreiskrümmung angepaßte Filmkassette der Physikal. Techn. Reichsanstalt²⁾ benutzt, in der auf gewöhnlichem oder sensibilisiertem Kinofilm photographiert wurde. Man konnte auf diese Weise Spektre über etwa 4000 ÅE. erhalten, die frei von jeder Unterbrechungsstelle waren. Für Übersichtsaufnahmen, auf denen keine feineren Messungen vorgenommen werden sollen, ist das Arbeiten mit dem biegsamen Film sehr angenehm. Durch gutes Anpressen an die Kassettenränder kann erreicht werden, daß der Film hinreichend plan liegt, so daß keine nennenswerten Verzerrungen eintreten können.

Für orientierende Voraufnahmen kleinerer Dispersion wurde vielfach ein kleines 1 m-Gitter der Reichsanstalt benutzt, dessen Dispersion in erster Ordnung etwa 35,5 ÅE in zweiter Ordnung 17,7 und in dritter Ordnung 11,8 ÅE. pro Millimeter der Platte ergab.

Wegen seiner Lichtstärke konnte das kleine Gitter auch als Vordispersion für eine Interferenzplatte benutzt werden, so daß es möglich war, selbst von sehr lichtschwachen Bandenlinien Interferenzbilder zu erhalten, die zur Messung der Linienbreiten dienen konnten. Auf die Einzelheiten dieser Anordnung komme ich in dem Abschnitt über die Beitemessungen S. 787 näher zurück.

1) E. Gehreke, Ztschr. f. Instrumentenkunde 42. S. 277. 1922.

2) Tätigkeitsbericht der P. T. R. 1923, Ztschr. f. Instrumentenkunde 44. S. 120. 1924.

b) Reinigung und Vorbehandlung der benutzten Heliummengen

Die für meine Untersuchungen erforderlichen Heliummengen wurden mir aus den Vorräten der Reichsanstalt freundlichst zur Verfügung gestellt. Zur Füllung und Evakuierung der verschiedenen Glimmröhren, die ich benutzte, diente eine große Töplerpumpe, da rotierende Quecksilberpumpen nicht geeignet gewesen wären, überschüssige Mengen des wertvollen Gases

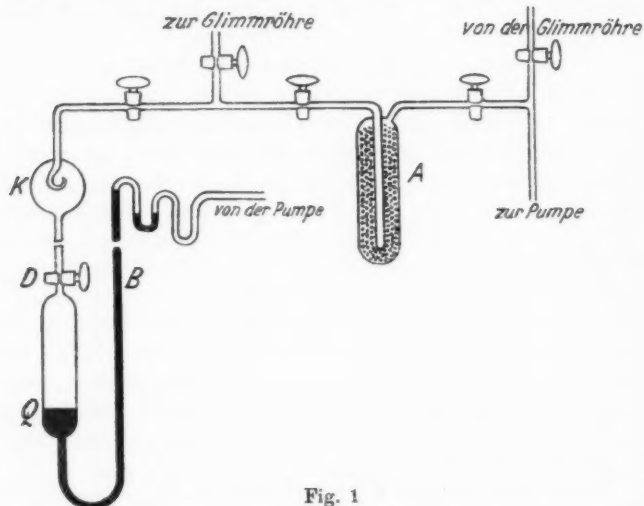


Fig. 1

zurückzugewinnen und aufzusammeln. Die vorhandene Töplerpumpe wurde für die besonderen Zwecke des wiederholten Umfüllens derselben Gasmenge etwas abgeändert und mit folgenden Hilfsvorrichtungen versehen: Das Barometerrohr *B* der Pumpe (Fig. 1), das ursprünglich in der üblichen Weise in ein Quecksilbergefaß gesenkt war, durch das die ausgepumpten Gasmenge in die Atmosphäre entweichen konnten, wurde an seinem tiefsten Punkt nach oben umgebogen und zu einer Erweiterungsstelle *Q* geführt, die mit Quecksilber gefüllt den gewöhnlichen Barometerabschluß der Pumpe bildete. Oberhalb der Erweiterungsstelle wurde ein Dreiwegehahn angebracht, der die Verbindung mit der Außenluft herstellte,

wenn die Pumpe in der üblichen Weise evakuieren sollte. Die zweite Bohrung des Dreivegehahns führte zu einem Sammelkolben *K*, der zur Aufnahme zurückgepumpter Heliummengen diente. Durch eine Quecksilberfalle konnten diese Heliummengen wieder nach der Glimmröhre oder über Reinigungsgefäße *A* mit geglühter Kohle hinweg wieder zur Pumpe geführt werden. Es entstand also um die Pumpe herum ein völlig geschlossener Gaskreislauf, bei dem jeder Gasverlust nach Möglichkeit verhindert war. Der Kreislauf diente folgendem Zweck:

Da die mir zur Verfügung stehenden Heliumvorräte zum Teil sehr stark verunreinigt waren, machte es zeitweilig Mühe, sie im spektroskopischen Sinne wirklich rein darzustellen. Die gebräuchliche Art, das Gas über ausgeglühte Kohle in flüssiger Luft hinzuleiten, ist nur wirksam, solange es sich um schwache Verunreinigungen handelt. Denn das Herüberströmen des Gases über die Kohle geschieht immerhin so schnell, daß nur geringe Gasmengen in ihr zurückbleiben. Ist man aber in der Lage, in einem Kreislauf dieselbe Heliummenge mehrmals über die Kohle zu leiten, so absorbiert diese enorme Mengen von Verunreinigungen. Zur Prüfung des Reinigungsvorganges diente eine kleine, in den Kreislauf eingefügte Proberöhre mit enger Kapillare, die den Strömungsvorgang ihrerseits noch ein wenig verlangsamt; sie wurde mit dem Strom eines kleinen Induktors angeregt und gestattete so, den Zustand des leuchtenden Gases und damit den Fortgang der Reinigung dauernd zu verfolgen. Bei wenig verunreinigten Gasmengen genügten meist ein oder zwei Umläufe zur Reinigung, bei anderen waren bis zu sieben oder acht erforderlich, um das Gas in der für spektroskopische Zwecke benötigten Reinheit darzustellen. Auf diese Weise konnten auch Heliummengen noch nutzbar gemacht werden, die zu Beginn so viel fremde Beimengungen enthielten, daß das Heliumspektrum fast völlig unterdrückt war.

Das Hauptreinigungsgefäß enthielt etwa 35 g Kokosnußkohle und diese war vor der Benutzung sehr sorgfältig über dem Bunsenbrenner ausgeglüht. Nach jedem Reinigungsprozeß wurde sie wieder geglüht und die freiwerdenden Fremdgase in die Luft ausgepumpt. Das Ausglühen nach einem Reinigungsprozeß geschah gewöhnlich in einem kleinen elektrischen Ofen,

in den das Kohlegefäß gerade hineinpaßte. Auf diesem Wege war leichter eine allmähliche und gleichmäßige Erhitzung zu erzielen, als mit der Bunsenflamme, auch konnte die erreichte Temperatur an einem in den Ofen eingeführten Thermometer jederzeit kontrolliert werden. Die Erhitzung ging gewöhnlich bis etwa 450 oder 480 Grad.

Wenn das Gas nach der Reinigung längere Zeit im Sammelgefäß gestanden hatte, wurde es vorsichtshalber vor der Zufüllung in die Glimmröhre meist nochmals über ein kleineres Kohlegefäß geführt, in dem die letzten Reste von Fremdgasen zurückblieben. Dieses Kühlgefäß hielt auch die Quecksilberdämpfe der Pumpe von der Röhre fern. Soweit noch ein besonderer Quecksilberschutz notwendig war, wurde ein Filter aus Blattsilber und Blattgold benutzt, das so hergestellt war, daß in einem Rohr kleine Ballen von Glaswolle, mit Blattgold oder -silber umwickelt, zu einem dichten Gemenge gepreßt wurden. Durch dies Gemenge bahnt sich das Gas nur langsam seinen Weg, wobei das Quecksilber mit den Metallfolien amalgamiert wird.

Am schwierigsten fernzuhalten aus heliumgefüllten Röhren ist Wasserstoff. Auch sorgsam gereinigte Röhren geben mit der Zeit geringe Mengen Wasserstoff ab, die sich spektroskopisch stark vordrängen und darum sehr lästig sind. Es empfahl sich daher in vielen Fällen, in denen es auf größte Sauberkeit ankam, zu Beginn dem Helium eine geringe Menge Sauerstoff zuzusetzen, der spektroskopisch kaum stört und überdies dadurch bald verschwindet, daß er bei Funkenentladung mit dem herauskommenden Wasserstoff zu H_2O verbrennt und dann durch ein Trockengefäß mit Phosphorpentoxyd beseitigt wird.

II. Die Feinstrukturen der Fowlerserie

1. Theoretische Bedeutung

Die von Fowler¹⁾ im Jahre 1912 in einem Helium-Wasserstoffgemisch entdeckte Linienserie, die zunächst dem

1) A. Fowler, Monthly Notices of the Roy. Astron. Society 73. Nr. 2. 1912.

Wasserstoff zugeschrieben wurde, bis Bohr¹⁾ sie 1915 mit der Serienformel

$$\nu = 4 N_{\text{He}} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad k = 4, 5, 6, \dots$$

dem Helium zuordnete, ist durch die komplizierte Vielfachstruktur ihrer Linien von besonderem theoretischen Interesse geworden. Es gelang Sommerfeld²⁾, die Größen der Linienaufspaltungen dieser Serie, die eine „durch den Faktor 4 bewirkte Übersetzung der ultraroten Wasserstoffserie ins Violette“ darstellt, theoretisch vorausszusagen und in einfacher Weise mit der Dublettgröße der Balmerserie in Beziehung zu setzen. Diese Feinstrukturtheorie fußte auf den von Paschen³⁾ im Jahre 1916 in großer Dispersion erhaltenen Bildern dieser Liniengruppen, die mit der Theorie zu fast völliger Deckung gebracht werden konnten. Da die Heliumfeinstrukturen sowohl ihrer Größe als auch der Linienschärfe wegen mit größerer Genauigkeit zu messen waren, als das Wasserstoffdublett selber, so konnte aus der theoretischen Beziehung rückwärts auf den Betrag der Aufspaltung der Balmerlinien zurückgeschlossen werden, der damit im Sinne Sommerfelds die Bedeutung einer universellen spektroskopischen Einheit⁴⁾ erhielt.

Die Übersichtlichkeit dieser theoretischen Beziehungen wurde nun in letzter Zeit dadurch in Frage gestellt, daß die mit verbesserten Mitteln an den Balmerlinien direkt vorgenommenen Messungen⁵⁾ mit den theoretischen Werten der Heliumfeinstrukturen immer weniger in Einklang gebracht werden konnten. Die Messungen blieben fast alle so beträchtlich hinter dem aus den Heliumlinien gefolgerten Wert zurück, daß diese Abweichung sich mit den möglichen Fehlerquellen nicht mehr überdecken ließ. Auch war anscheinend das Auswahlprinzip, das zur Deutung der bei den Fowlerlinien ge-

1) N. Bohr, *Phil. Mag.* **30**, S. 394. 1915.

2) A. Sommerfeld, *Ann. d. Phys.* **51**, S. 44. 1916.

3) A. a. O., vgl. S. 757, Anm. 2.

4) A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, 4. Aufl. S. 473 ff. 1924.

5) E. Gebrcke und E. Lau, *Ann. d. Phys.* **67**, S. 383. 1922; G. Hansen, *Phys. Zeitschr.* **26**, S. 678. 1925; L. Janicki und E. Lau, *Zeitschr. f. Phys.* **35**, S. 1. 1925.

fundenen Komponentenbilder herangezogen war, bei den Balmerlinien in dieser Form nicht verwirklicht.

Es schien daher wichtig, diese Abweichungen irgendwie zu klären und zu diesem Zweck die Linien des Fowlerspektrums einer erneuten Untersuchung zu unterziehen, um festzustellen, ob sich dabei die Beziehung zum Wasserstoffdublett wiederherstellen ließ, oder ob die mühsam aufgerichtete Feinstrukturtheorie eines ihrer wichtigsten Bausteine verlustig gehen sollte.

2. Versuchsanordnung

a) Lichtquelle

Zur Untersuchung dieser Fragen wurde zunächst die von Paschen zu seinen Arbeiten im Jahre 1916 benutzte Heliumlampe¹⁾ möglichst genau kopiert. Die in Rede stehenden Linien erscheinen besonders hell im Innern einer zylindrischen oder Kastenelektrode, wie sie von Paschen bei Gleichstrombetrieb als Kathode benutzt wurde. Die von mir verwendeten Röhren waren auch in den Größenmaßen den Paschenschen nachgebildet, lediglich der Abstand zwischen Elektrode und Quarzfenster war um einen geringen Betrag vergrößert worden, um Erwärmungen der Kittstelle des Fensters mit der Glaswand nach Möglichkeit auszuschließen und die Bildung von spektroskopisch störenden Kohlenstoffverbindungen bei Dauerbetrieb zu verhindern. Die Röhren wurden nach ausgiebiger Sauerstoffspülung unter Anwendung der erwähnten Vorsichtsmaßregeln mit Helium von 3—4 mm Druck gefüllt und evakuierten sich in diesem Zustand bei Belastung sehr schnell. Nach mehrmaligem Zufüllen, wenn Elektroden und Glaswand eine gewisse Heliummenge aufgenommen haben, bildet sich ein nahezu stationärer Zustand, in dem die Röhren lange Zeit gehalten werden können. Um sie bei verschiedenen Drucken und in verschiedensten Zuständen untersuchen zu können, wurden sie nach Erreichung des stationären Zustands nicht abgeschmolzen, sondern auch während des Betriebes in Verbindung mit der Pumpe gehalten. Mit Ausnahme der Fälle, in denen die bei Dauerbetrieb unvermeidliche Elektrodenzerstäubung dem Strom allmählich einen metallischen Weg

1) a. a. O., vgl. S. 757, Anm. 2.

über die Glaswände gab und dadurch zur gewaltsamen Zerstörung der Röhre führte, war es so auch möglich, die wertvollen zur Füllung benutzten Heliummengen zurückzugewinnen und für spätere Verwendung nutzbar zu machen. Der Druck wurde meist zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 mm gehalten, blieb aber naturgemäß während einer länger dauernden Exposition nicht ganz konstant.

Da mir eine Gleichstrombatterie geeigneter Größe nicht zur Verfügung stand, war ich auf die 120-Volt-Wechselstromleitung der städtischen Zentrale angewiesen, deren Strom auf etwa 1200 Volt herauftransformiert wurde. Die Form der Elektroden (eine kleine Röhrenelektrode gegenüber der Unterfläche der Kastenelektrode) drosselte hierbei die eine Phase des Transformatorstroms so stark, daß im wesentlichen ein intermittierender Gleichstrom übrig blieb, bei dem die Kastenelektrode Kathode war. Es bedeutete dies zwar eine Energieverschwendung und Verlängerung der notwendigen Expositionszeiten, war aber zunächst unumgänglich, um das kathodische Licht der Röhre einigermaßen rein, und damit entsprechende Verhältnisse zu bekommen wie die, unter denen Paschen seinerzeit gearbeitet hatte. Im späteren Verlauf der Arbeit, als diese Trennung des negativen Glimmlichts von der positiven Säule nicht mehr so wichtig schien, wurde zwecks besserer Energieausnutzung eine abgeänderte Röhrenform benutzt, bei der an die Stelle der kleinen Röhrenelektrode eine zweite koaxiale Kastenelektrode trat. Es wurden so beide Stromphasen nutzbar gemacht, wobei beide Kästen abwechselnd Anode und Kathode waren.

b) Zylinderlinse

Um eine weitere Energieersparnis zu erzielen und damit die für so schwache Objekte erforderliche Belichtungszeit herabzusetzen, wurde nach einer von Gehrcke angegebenen Methode¹⁾ vor der photographischen Platte eine Zylinderlinse von 15 cm Brennweite in den Strahlengang gefügt, die das Spektrum in seiner Längsrichtung ungeändert ließ, in der Senkrechten dazu aber zu einem kaum 2 mm hohen Bande

1) E. Gehrcke, Zeitschr. für Instrumentenkunde. 31. S. 87. 1911.

zusammenzog. Die Strahlungsenergie wurde dadurch auf etwa den zehnten Teil der Fläche konzentriert, so daß selbst bei Berücksichtigung der geringfügigen Absorption in der Linse eine erhebliche Abkürzung der einzelnen Aufnahmen erzielt wurde.

Eine zunächst probeweise verwendete Zylinderlinse von 8 cm Brennweite erwies sich als ungeeignet, da die Zusammendrängung des Spektrums bei kurzer Brennweite zu extrem war und dadurch die Klarheit der Linienbilder litt. Bei der später benutzten Linse blieb die Zusammenziehung in günstigeren Grenzen; eine gewisse Linienverbreiterung trat nur noch in der Mitte der Linien auf, während die Enden oben und unten in scharfe Schwänze verliefen, die unter dem Fadenmikrometer besonders gut zu messen waren.

Die Justierung der Linsen vor der Platte ist, besonders in bezug auf die Linienrichtung, äußerst empfindlich. Die Zylinderachse muß zu den Linien genau senkrecht stehen, da sonst Verdrehungen und damit völlige Unschärfen der Linien auftreten. Die Linsen wurden daher in einer Drehfassung auf dem Kassettenfuß selber befestigt, so daß ihre Stellung zur Platte auch bei häufigem Neujustieren der Kassette unverändert blieb. Das Antriebsrad der Drehfassung erhielt einen Zeiger, der über einer Skala lief, so daß auf dieser die Drehungen sehr scharf eingestellt werden konnten.

Die Benutzung der Zylinderlinse brachte es mit sich, daß zurzeit immer nur ein schmaler Spektralbereich photographiert werden konnte, der so breit war, wie die Zylinderlinse selber. Bei den verwendeten Linsen betrug dies Intervall zwischen 25 und 35 mm, d. h. in zweiter Gitterordnung zwischen 25 und 35 ÅE., was bei der Kleinheit der zu untersuchenden Liniengebilde auch über einen genügenden Teil der Nachbarschaft reichte.

Ferner war es, insbesondere im Ultraviolett, wo eine Quarzzylinderlinse benutzt werden mußte, erforderlich, ausschließlich in der Gitternormalen zu photographieren, da dies die einzige Stelle des Kreises ist, wo der vom Gitter kommende Strahl senkrecht auf Zylinderlinse und Platte trifft. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt die schiefe Inzidenz, besonders im Quarz, zu willkürlichen kurvenförmigen Verzerrungen der

Linien Anlaß.¹⁾ Ich war also gezwungen, im Gegensatz zur üblichen Weise, mit feststehender Kassette zu arbeiten und mit dem Spalt nach Bedarf zu wandern.

c) Ausmessung der Platten

Die in dieser Anordnung erhaltenen photographischen Platten wurden hernach am großen Töpferschen Fadenmikrometer der Reichsanstalt ausgemessen und teilweise am Registrierphotometer des Hamburger Phys. Staatslaboratoriums photometriert. Zur Bestimmung der Wellenlängen wurde ein Eisenvergleichsspektrum zuweilen unmittelbar in die Heliumlinien hineinphotographiert, doch diente es nur als Skala, da es möglicherweise von anderen Spaltteilen kommen und auch durch zeitlichen Abstand geringe Verschiebungen gegen das Hauptspektrum erleiden konnte, und darum für absolute Messungen zu unzuverlässig erschien.

Absolute Wellenlängen wurden nur auf Umwegen über gut bekannte Standardlinien des Heliumspektrums selbst erhalten, worüber unten im einzelnen zu sprechen sein wird.

3. Meßergebnisse

A. Liniengruppe 4686

a) Ohne Funken

Die Aufnahmen dieser ersten Gruppe der Serie wurden zunächst etwa 24, später 48 und 56 Stunden belichtet, um hinreichend durchexponierte Bilder zu bekommen. Die Primärstromstärke am Transformator betrug hierbei zwischen 1,8 und 2,5 Amp.

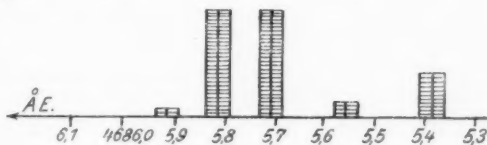


Fig. 2

Fig. 2 stellt schematisch das erhaltene Linienbild dar. Die Gruppe wurde in fünf deutlich getrennte Linien aufgelöst,

¹⁾ Vgl. die der Arbeit von E. Gehreke und E. Lau, Ann. d. Phys. 76. S. 673. 1925 beigegebene Tafel, Fig. 2.

von denen zwei sehr lichtschwach waren. Als Skala für die Wellenlängenmessungen wurden die Eisenlinien

4691,417

78,857

67,460

benutzt, doch wurden an die direkt interpolierten Werte Verschiebungskorrekturen angebracht, die aus späteren Untersuchungen, S. 790 ff. hervorgingen. Ich gebe hier die gemessenen Werte gleich mit diesen Korrekturen.

Tabelle 1

Linienbild ohne Funken

| Int. | λ Luft | Diff. | |
|------|----------------|-------|---|
| 0 | 4685,923 | 110 | ? sehr schwach, schlecht lokalisierbar. |
| 6 | ,813 | 104 | |
| 6 | ,709 | 152 | |
| 1 | ,557 | 162 | verwaschen. |
| 3 | ,395 | | |

Diese Zahlen sind Mittelwerte aus acht zur Messung benutzten Aufnahmen. Die gemessenen relativen Abstände wichen auf den einzelnen Platten im Maximum um 0,012 ÅE. voneinander ab; bei den scharfen Linien wird der wahrscheinliche Fehler 0,002 ÅE. nicht überschreiten.

Fig. 3, Taf. V stellt eine am Registrierphotometer des Hamburger Phys. Staatslaboratoriums hergestellte Photometerkurve des erhaltenen Linienbildes dar.¹⁾ Hierzu ist folgendes zu bemerken. Die Elektrometerkurve eines Registrierphotometers verläuft naturgemäß im allgemeinen nicht linear zur Intensität, kann also daher zur Beurteilung der relativen Intensitäten der Linien nicht dienen. Es kann nur allgemein herausgelesen werden, ob eine Linie heller oder lichtschwächer ist als eine andere, wobei das Maß dieses Helligkeitsunterschieds ganz unberücksichtigt bleibt. Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, wäre außer der Kenntnis der Empfindlichkeitskurve des Elektrometers auch die der Gradation der benutzten Platte erforderlich. Aber dies war eine Frage, die außerhalb der gegenwärtigen Untersuchung lag. Im vorliegenden Fall verlief die Empfindlichkeitskurve des Instruments bei geringen Schwär-

1) In allen Figuren der Tafel V und in Fig. 6 der Tafel VI liegen die größeren Wellenlängen links.

zungen flach und bei größeren Schwärzungen sehr steil, so daß die stärkeren Komponenten des Linienbildes relativ hoch erscheinen, während die schwachen Linien nur wenig aus den Zacken des Plattenkorns herausragen. Die Registrierkurve ist in der Vergrößerung 46:1 aufgenommen und zeigt in den Hauptspitzen, daß die Linien sehr scharf sind. Die Trägheit des Photometers war so gering, daß das Kurvenbild zur Nachmessung der Linienabstände gut verwendet werden konnte.

Wie aus den gemessenen Zahlen hervorgeht, ist das von mir erhaltene Komponentenbild innerhalb der Meßfehler fast identisch mit dem von Paschen bei Gleichstrom gefundenen. Eine sechste, nach größeren Wellenlängen liegende Komponente, die Paschen gesehen hat, war in meinen Aufnahmen nicht auffindbar, vielleicht wegen geringerer Durchexposition der Platten. Schon die langwelligste Linie meiner Aufnahmen ist außerordentlich lichtschwach.

b) Funkenentladung

Legt man in den Stromkreis der Röhre eine Funkenstrecke und parallel zu ihr eine Kapazität geeigneter Größe, so wird der Entladungszustand der Röhre wesentlich verändert. Die Röhre wird bedeutend heller und nimmt eine hellrote Färbung an; das Spektrum wird außerordentlich linienreich.

Die zunächst verwendeten Kapazitäten waren von der Größenordnung 8—10 000 cm und ergaben bei dieser Anordnung Funken von 1—1,5 mm Länge. Mit steigender Kapazität wurde die Gesamtemission der Röhre zwar heller, die Linien des Serienspektrums wurden aber gleichzeitig verwaschener. Von der Gruppe 4686 konnten in 20 Stunden stark exponierte Bilder erhalten werden, obwohl die Primärstromstärke am Transformator auf 1,3 Amp. herabgesetzt war. Da die Zinkkugeln einer vorhandenen Funkenstrecke beim Stromübergang zu stark zerstäubten und dadurch zu unruhigem Brennen der Röhre Veranlassung gaben, wurden sie durch Chromnickelstahlkugeln ersetzt, wie sie in handelsüblichen Kugellagern Verwendung finden. Diese Elektroden waren äußerst widerstandsfähig und gestatteten tagelangen

Betrieb, ohne daß die Länge der Funkenstrecke und damit der Entladungszustand der Röhre sich änderte.

Eine andere Form der Funkenstrecke, die hauptsächlich für langdauernde Aufnahmen des Bandenspektrums verwendet wurde, bei denen es noch mehr wie hier auf gleichmäßiges Arbeiten der Strecke ankam, wird auf S. 786 beschrieben.

Fig. 4a, Taf. V ist eine 4,2-fache Vergrößerung des mit solchen Funkenentladungen erhaltenen Bildes von 4686, Fig. 4b, Taf. V zeigt noch ein kleines Intervall in der Nähe dieser Gruppe. Es treten hier eine größere Zahl neuer Linien auf, die dem von Goldstein¹⁾ entdeckten Bandenspektrum angehören. Das Funkenbild von 4686 war von diesen Bandenlinien nicht zu trennen, wodurch die strenge Definition der Gruppe selbst zu-

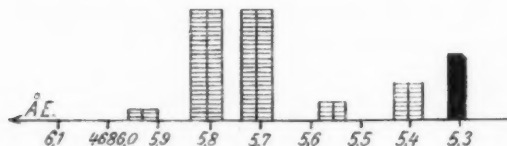


Fig. 5

nächst erschwert war. In Fig. 5 ist das erhaltene Gruppenbild wie oben schematisch dargestellt. Figg. 6 und 7, Taf. VI und V geben Photometerkurven dieser Gruppe wieder, von denen die erstere unter denselben Bedingungen erhalten wurde wie Fig. 3, Taf. V. Die Spaltbreite des Photometers betrug hierbei $15\ \mu$, entsprechend einem Bereich von $0,015\ \text{\AA E.}$, wobei infolge der Verbreiterung der Hauptlinien deren Trennung nicht mehr scharf wiedergegeben wurde. Die untere Reihe der Abbildung zeigt Registrierkurven, die nach einer vergrößerten Platte mit einem Registrierspalt von $0,06\ \text{mm}$ Breite auf dem Photometer der Reichsanstalt erhalten wurden.

Zur Ausmessung standen eine große Anzahl von Aufnahmen zur Verfügung, von denen 13 als bestdefinierte ausgewählt wurden. Die Messungen ergaben folgende Mittelwerte:

1) E. Goldstein, a. a. O. Anm. 1, S. 757.

Tabelle 2
Funkenbild

| Int. | λ Luft | Diff. | |
|------|----------------|-------|---------------|
| 0 | 4685,931 | | sehr schwach |
| 7 | ,812 | 0,119 | } verbreitert |
| 7 | ,710 | 0,102 | |
| 1 | ,559 | 0,151 | |
| 3 | ,412 | 0,147 | |
| 5 | ,309 | 0,103 | scharf |

Der wahrscheinliche Fehler dieser Werte ist von derselben Größenordnung wie bei den Aufnahmen ohne Funken, bei den stark verbreiterten Linien vermutlich um einen geringen Betrag größer.

Die Gruppe ist also hier in 6 Komponenten aufgelöst, von den fünf, abgesehen von den Intensitätsverhältnissen, mit denen des ohne Funken erhaltenen Bildes übereinstimmen. Hinzukommt nach kurzen Wellenlängen eine scharfe und relativ sehr helle Funkenlinie, deren Bedeutung im folgenden Kapitel näher erörtert werden wird. Wir gehen zunächst zur Beschreibung des experimentellen Bildes der nächsten Gruppe der Serie bei λ 3203 über.

B. Liniengruppe 3203

Die Aufnahmen der Gruppe bei 3203 wurden ebenfalls in zweiter Gitterordnung erhalten, obwohl die Winzigkeit der hier in Frage kommenden Linienaufspaltungen bereits eine größere Dispersion wünschenswert gemacht hätten. Diese Gruppe ist aber noch beträchtlich lichtschwächer als die vorhergehende, und die in höheren Ordnungen notwendig werdenden, übermäßig langen Belichtungszeiten ließen dann Fehler und Unschärfen durch Temperaturverschiebungen befürchten.

Die Kassette blieb, wie oben erwähnt, in der Gitternormalen; der Spalt wurde um den erforderlichen Betrag verschoben. Die bisher gebrauchte Zylinderlinse aus Glas mußte durch eine Quarzlinse ersetzt werden, was insofern einige Schwierigkeiten machte, als streng darauf geachtet werden mußte, daß nicht eine geringe Schiefelage der Kristallachse

Doppelbilder der Linien erzeugte.¹⁾ Im übrigen waren die Erzeugungsbedingungen dieselben, wie bei der vorhergehenden Gruppe. Die Expositionszeiten erstreckten sich über 2 bis 3 Tage.

Auf den meisten Aufnahmen war das erhaltene Bild dem ähnlich, das Paschen als Funkenbild erhielt, wo eine solche Überlagerung der Komponenten stattfindet, daß nur zwei stark verbreiterte Linien sichtbar bleiben. Nur spurenweise wurde die Hauptlinie als enges Dublett aufgelöst.

Die Wellenlängen wurden ebenfalls zwischen hineinphotographierten Eisenlinien interpoliert und gegen die gut definierte Heliumlinie 3187,744 korrigiert. Als Interpolationslinien dienten die Eisennormalen

| | |
|----------|----------|
| 3180,220 | 3200,478 |
| 84,900 | 05,401 |
| 91,664 | 15,944 |
| 99,527 | 17,385 |

Als Mittelwerte ergaben sich folgende Wellenlängen:

Tabelle 3
Linienbild ohne Funken

| Int. | λ Luft | Diff. | |
|------|----------|-------|--------------------------------------|
| 4 | 3203,169 | 0,051 | } meist zusammenfließend in 3203,144 |
| 5 | 3,118 | 0,157 | |
| 1 | 2,961 | | |

Die absoluten Wellenlängen dieser Gruppe können nicht denselben Anspruch auf Genauigkeit erheben, wie die der Gruppe 4686, da hier nicht dieselben Korrektionsmöglichkeiten gegeben waren.²⁾ Die Interpolation zwischen Eisennormalen allein bringt immer gewisse Fehler mit sich, die dadurch bedingt sind, daß das Licht des Eisenbogens nicht gleichzeitig mit dem der Hauptlichtquelle, nicht gleich lange, und meist auch nicht auf ganz gleichen Teilen des Spaltes photographiert wird.

Ich habe zur Untersuchung der Verschiebungen, die hieraus vorgehen, besondere Versuche in dieser Richtung an-

1) Eine geeignete Quarzzylinderlinse wurde mir von Hrn. Prof. C. Pulfrich von den Zeiss-Werken in Jena freundlicherweise zur Verfügung gestellt, wofür ich diesem zu besonderem Dank verpflichtet bin.

2) Vgl. S. 794.

gestellt, und dabei einwandfreie Eisennormalen gegen interferometrisch bekannte Heliumlinien gemessen und umgekehrt. Durch absichtliches Placieren des nicht ausfüllenden Eisenbogens auf verschiedene Gitterteile konnten willkürlich Wellenlängendifferenzen bis nahezu $0,1 \text{ \AA}$. erzeugt werden. Ganz verschwanden solche Differenzen selbst dann nicht, wenn durch eine zwischen Lichtquelle und Spalt eingefügte Linse bewirkt wurde, daß das Licht des Eisenbogens das Gitter vollständig ausfüllte.

Für die Zwecke der vorliegenden Arbeit waren die absoluten Wellenlängen nicht von solcher Bedeutung, daß weitere Untersuchungen nach dieser Richtung geboten schienen. Die relativen Abstände der Komponenten, auf die es ankam, erschienen genügend definiert und stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit den Paschenschen Messungen der Hauptlinien überein.

Mit Funkenentladung wurden die Linien noch mehr verbreitert und damit für Meßzwecke unbrauchbar.

Weitere Gruppen der Serie zu untersuchen, schien nicht angebracht, da die Glieder mit fortschreitender Seriennummer immer lichtschwächer werden, und die stetig enger werdende Struktur keine wesentlichen neuen Aufschlüsse mehr versprach. Das Hauptinteresse konzentrierte sich auf die theoretische Bedeutung des gefundenen Linienbildes von 4686.

4. Die Deutung der Liniengruppe 4686 in der Sommerfeldschen Feinstrukturtheorie

Die Theorie der Feinstruktur, die Sommerfeld im Jahre 1916 aus der Massenveränderlichkeit des Elektrons bei elliptischer Umlaufbahn ausführlich entwickelte¹⁾, forderte für die Linie 4686 nach der Gleichung

$$\nu = 4 N_{\text{He}} \left\{ \frac{1}{(n + n')^2} - \frac{1}{(m + m')^2} \right\} \quad \text{für } \begin{matrix} n + n' = 3 \\ m + m' = 4 \end{matrix}$$

eine Vielfachstruktur von $3 \cdot 4 = 12$ Komponenten, von denen jedoch durch die Annahme, daß eine Änderung der Quantenzahlen der einzelnen Ellipsenübergänge nur im negativen

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51. 1916, besonders S. 68 ff. u. 80 ff.
Annalen der Physik. IV. Folge. 81. 50

Sinne möglich sei, die Hälfte ausgeschaltet wurde. Die Quantenungleichungen

$$m \geq n, \quad m' \geq n',$$

die Sommerfeld, soweit $m \geq n$ in Frage kam, für bedingt, soweit es sich um $m' \geq n'$ handelte, unter normalen Umständen für ausnahmslos gültig ansah, ließen für die Linie 4686 sechs Hauptkomponenten und eventuell drei schwache Nebekomponenten erwarten. Das Schema dieses von Sommerfeld zunächst theoretisch aufgestellten Komponentenbildes ist nach einer von ihm gegebenen Zeichnung in Fig. 8 wiedergegeben.

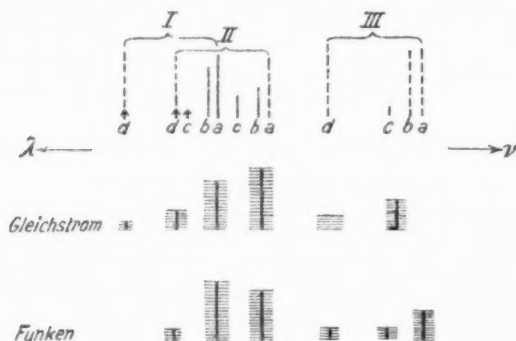


Fig. 8

Hiernach sollten die theoretischen Komponenten Ia, b, IIb, c, IIIc, d und vielleicht Ic, d und IId, letztere drei aber nur schwach, auftreten. Die Linien IIa und IIIa, b waren nach obiger Quantenbedingung ausgeschaltet.

Im Gleichstrombild der Linie 4686 konnte Paschen dieses theoretische Linienschema mit großer Exaktheit wiedergeben. (Mittlere Reihe der Fig. 8.) Daß die Linie IIc nicht aufgefunden werden konnte, ist angesichts der engen Aufspaltung des Dubletts Ia—IIa nicht verwunderlich. — Das Funkenbild, das Paschen erhielt (untere Reihe der Fig. 8), widersprach jedoch den obigen Auswahlbedingungen durch das Auftreten der Linie 4685,307, der kurzwelligsten der Gruppe, die als IIIa gedeutet wurde und nach den Sommerfeldschen Anschauungen irreal sein sollte.

Das Auftreten dieser Linie 4685,307 gab wesentlich mit dazu Anlaß, die obigen Quantenungleichungen als Auswahlbedingungen preiszugeben; man versuchte das Linienbild anders zu deuten, nämlich unter Zuhilfenahme des Bohr-Kramersschen Auswahlprinzips¹⁾, das eine Änderung der azimutalen Quantenzahl um ± 1 zuläßt. Unter dieser Voraussetzung sollten bei feldfreier Erzeugung (im Gleichstrombild) von der Gruppe 4686 die Komponenten Ia, c, IIb, d und IIIc erscheinen, während im Funkenbild, also bei stoßweiser Anregung durch Entladung großer Elektrizitätsmengen, alle zwölf theoretisch möglichen Komponenten vollzählig erscheinen müssen.

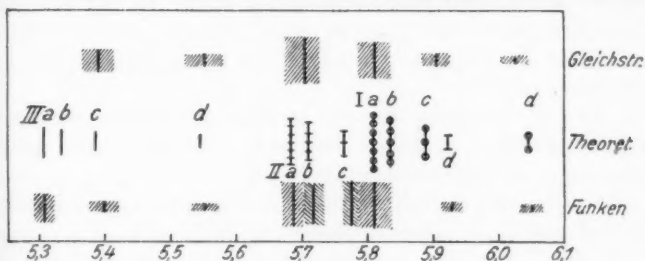


Fig. 9

Mit diesem Auswahlprinzip waren die experimentellen Befunde Paschens, sowohl das Gleichstrombild (bis auf sehr kleine Abweichungen, die auf entstehende elektrische Felder zurückgeführt wurden) als auch das Funkenbild, in so nahe Übereinstimmung mit der Sommerfeldschen Theorie gebracht (vgl. Fig. 9)²⁾, daß das hier gefundene Linienschema seiner Größe und Bestimmtheit wegen für die Deutung der viel engeren Wasserstofffeinstrukturen richtunggebend wurde. Die Linienabstände, die nach der Theorie einfache rationale Vielfache des Wasserstoffdoublets $\Delta\nu_H$ sind, ließen durch Umrechnung eine viel schärfere Bestimmung von $\Delta\nu_H$ zu, als man von den verwascheneren Wasserstofflinien selbst erwartete.

1) A. Rubinowicz, Phys. Zeitschr. 19. S. 441 u. 465. 1918; N. Bohr, D. Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr. natur og math. Afd., 8, R. IV., 1 und 2. 1918; H. A. Kramers, D. Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr. natur og math. Afd., 8, R. III. 3. 1919.

2) Diese Figur ist der Originalarbeit von Paschen, Ann. d. Phys. 50. S. 916. 1916 entnommen.

Der von Paschen aus seinen Messungen erhaltene Wert betrug

$$\Delta\nu_H = 0,3645 \pm 0,0045 \text{ cm}^{-1}.$$

Zu seiner Berechnung ist hauptsächlich der Abstand der Komponente IIIa von den anderen Linien der Gruppe benutzt worden.

Nun zeigt aber gerade diese Linie 4685,309¹⁾, die als IIIa angesprochen wurde, ein wesentlich anderes Aussehen, als die übrigen Linien der Gruppe; sie bleibt scharf auch bei kräftigen Funkenentladungen, und fiel dadurch besonders auf, daß sie stets gemeinsam und in ihrer Intensität parallel mit den S. 770 erwähnten Bandenlinien auftrat. Es lag also die Vermutung nahe, daß man es auch hier gar nicht mit einer Linie der Seriengruppe, sondern mit einer Bandenlinie zu tun habe.

Dieser Vermutung, die der Deutung der Gruppe 4686 ein anderes Gesicht zu geben versprach, bin ich näher nachgegangen und fand dabei folgendes:

1. Die Linie 4685,309 tritt stets nur gemeinsam mit dem übergelagerten Heliumbandenspektrum auf. Es gelang mir nicht, das Funkenbild von 4686 frei von den Bandenlinien zu erhalten.

2. Die Intensität der Linie 4685,309 bleibt bei Veränderung des Entladungszustandes genau parallel mit der der übrigen Bandenlinien, während sie im Verhältnis zur Gruppe 4686 beliebig verändert werden kann. Bei hohem Druck und starker Funkenentladung, bei der die Seriengruppe stark zurücktritt, bleibt die Linie 4685,309 ebenso wie die anderen Bandenlinien sehr hell, kann sogar zu einem Vielfachen der Helligkeit der Hauptlinien 4685,812 und 4685,710 der Seriengruppe gesteigert werden.

3. Die Breite der Linie 4685,309²⁾ ist kleiner als die der Serienlinien und stimmt mit derjenigen der übrigen gemessenen Bandenlinien überein.

Aus allen diesen Gründen, sowie aus Nachmessung der von Curtis³⁾ untersuchten Heliumbande bei 4650, die im

1) Paschen hat diese Linie mit 4685,307 IA gemessen.

2) Über die Einzelheiten der Breitemessungen vgl. S. 787 ff.

3) A. a. O., Anmerkung 1. S. 758.

ritten Teil dieser Arbeit ausführlicher wiedergegeben ist, ging eindeutig hervor, daß die in Rede stehende Linie tatsächlich bisher irrtümlich als Bestandteil der Gruppe 4686 angesehen worden ist. Sie ist vielmehr das fünfte Glied eines Zweiges der ausgedehnten Heliumbande bei 4650, hat also nicht das ionisierte He-Atom, sondern ein He-Molekül zum Träger.¹⁾

Zur Veranschaulichung dieser Tatsache ist in Fig. 10, Taf. VII in der mittleren Reihe das Gebiet um 4686 bei Funkenerregung, darunter das von dieser Aufnahme erhaltene Photometerbild und in der obersten Reihe²⁾ das übergelagerte Bandengebiet in einem größeren Intervall wiedergegeben. *b* bezeichnet die Linien des regelmäßig gebauten Bandenzweiges, deren Intensitätsverhältnisse in der Photometerkurve schon ihre Zusammengehörigkeit kennzeichnen.

Schaltet man demnach die Linie 4685,309 aus dem Gruppenverband von 4686 aus, so fällt zunächst auf, daß das Funkenbild der Gruppe sich, abgesehen von der Linienverbreiterung und kleinen Intensitätsverschiebungen, vom Gleichstrombild nicht mehr merklich unterscheidet. Dies würde dem ursprünglichen Sommerfeldschen Auswahl-schema entsprechen.³⁾

Es könnte zwar eingewandt werden, daß die bisher übliche Deutung des Linienbildes aufrecht erhalten werden könne, wenn man annähme, daß die als IIIa angesehene Funkenkomponente möglicherweise doch vorhanden und von der Bandenlinie nur überlagert sei. Selbst wenn das der Fall wäre, würde die Linie 4685,309 für alle feineren Messungen ausgeschaltet bleiben; ihre Intensität könnte nach meinen Befunden auch nur äußerst gering sein und würde damit im Gegensatz zu dem stehen, was aus dem Bohr-Kramersschen

1) Herr Präsident Paschen, dem ich die Originalaufnahmen des in Betracht kommenden Gebiets vorlegen durfte, ist in ausführlicher Erörterung dieser Frage meiner Auffassung über die Linie 4685,309 beigetreten.

2) Die oberste Reihe ist leider nicht im genau gleichen Größenmaßstab, wie die beiden unteren. Sie ist so gelegt, daß die Linie 4686 in allen drei Bildern übereinandersteht; die äußeren Bandenlinien weisen beiderseitig um kleine Beträge nach außen, lassen sich aber zu den entsprechenden Linien der unteren beiden Reihen leicht zuordnen.

3) Vgl. nächste Anmerkung.

Auswahlprinzip zu erwarten wäre. Schließlich macht noch ein weiteres Bedenken die obige Annahme zweifelhaft:

Nach dem genannten Auswahlprinzip sollen im Funkenbild nicht nur die Komponenten IIIa, b, sondern auch IIa auftreten, deren zu erwartende Intensität größer ist, als die von IIIa. Die Folge davon müßte eine Verbreiterung des Dublettstandes Ia—IIb (Gleichstrombild) auf Ia—IIa im Funkenbild sein, theoretisch von 0,102 auf 0,127 ÅE.

Eine solche Verbreiterung tritt in Wirklichkeit nicht auf, vielmehr ist die Aufspaltung des Dubletts im Funken- wie im Gleichstrombild immer zwischen 0,101 und 0,108 ÅE gemessen worden, wobei zu bemerken ist, daß die bekannten physiologischen und photographischen Fehler, die bei Messung so enger Dubletts immer auftreten, nach Möglichkeit berücksichtigt worden sind. Auch ein Anwachsen der Intensität der Linie 4685,709 gegenüber der Linie 4685,812, was sich durch Hinzutreten einer neuen starken Komponente im Funkenbild zum mindesten zeigen müßte, ist nicht beobachtet; im Gegenteil hat Paschen die kurzwelligere Komponente im Funkenbild relativ schwächer gefunden als im Gleichstrombild.

Diese Tatsachen sprechen eindeutig gegen das Bohr-Kramerssche Auswahlprinzip, das nach Fortfall der Linie 4685,309 zum mindesten für diese Gruppe entbehrlich wird.

Wie Janicki und Lau im Anschluß an meine Feststellung, daß die Linie 4685,309 der Feinstruktur von 4686 nicht angehört, neuerdings¹⁾ gezeigt haben, ist die alte Quantenregel Sommerfelds besser als das Auswahlprinzip von Bohr-Kramers geeignet, die Feinstrukturen wiederzugeben. Es ergeben sich dann offenbar zwei Möglichkeiten der Deutung des verbleibenden Linienbildes: Entweder der Verzicht auf jedes Auswahlprinzip, oder die Rückkehr zum ursprünglichen Sommerfeldschen Auswahlchema.

Im ersteren Fall müßte man die tatsächlich vorhandenen Linien neu auf alle theoretisch möglichen Komponenten verteilen. Die theoretische Linie IIIa würde damit nach innen rücken (Fig. 11), und zwar auf die bisher als IIIc angesprochene Linie 4685,395. (Im Funkenbild ist diese Linie wegen der

1) L. Janicki und E. Lau, Zeitschr. f. Physik 35. S. 1. 1925.

Nachbarschaft der Bandenlinie aus oben erwähnten photographischen Gründen wahrscheinlich etwas verschoben und darum um einen kleinen Betrag langwelliger gemessen worden.) Gleichzeitig würde die theoretische Linie IIa auf die bisher mit IIb bezeichnete Linie 4685,709 fallen.

Die drei Hauptlinien

| | Diff. |
|----------|-------|
| 4685,813 | 0,104 |
| 4685,709 | 0,314 |
| 4685,395 | |

hätten damit wieder genau das von Sommerfeld geforderte charakteristische Abstandsverhältnis 1:3, nur gegen die bis-

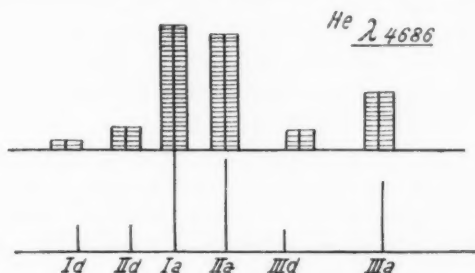


Fig. 11

herige Deutung in verkleinertem Gesamtmaßstab. Würde man in derselben Weise wie Paschen aus diesen Abständen auf $\Delta\nu_{II}$ zurückrechnen, so ergäbe sich:

| | $\Delta\lambda$ ÅE. beob. | Entspricht $\Delta\lambda_{\infty}$ | Daraus $\Delta\lambda_{\infty}$ |
|----------|------------------------------|--|------------------------------------|
| Ia—IIIa | 0,418 | $4 \times 1,5802$ | 0,0661 |
| IIa—IIIa | 0,314 | $3 \times 1,5802$ | 0,0662 |
| | | | 0,0662 |

$$\Delta\nu_{II} = \frac{0,0662}{4687^2,0} 10^6 = 0,301 \text{ cm}^{-1}.$$

Dieser Wert stimmt einerseits gut mit den an H_a gemessenen neueren Werten überein¹⁾, ist aber andererseits gegenüber dem Grenzwert, dem die höheren Glieder der Balmerserie zuzustreben scheinen, etwas zu klein.

1) Vgl. S. 763, Anmerkung 5.

Es muß auch betont werden, daß man bei dieser Art der Zuordnung, die für die drei Hauptlinien etwas Bestechendes hat, mit den Unterkomponenten Id, IId und IIId in gewisse Schwierigkeiten gerät. Sie lassen sich hier nicht in der gewohnten Weise einfügen, sondern bilden dann anscheinend unter sich nur wieder ein Nebentriplett mit dem gleichen Abstandsverhältnis 1:3, ohne daß es möglich wäre, die engere zahlenmäßige Beziehung zum Haupttriplett herzustellen.

Die zweite Möglichkeit der Zuordnung bestände nach Janicki und Lau¹⁾ darin, zu der *ursprünglichen* Sommerfeldschen Auffassung zurückzukehren. Mit dieser läßt sich das experimentelle Bild von 4686 nach dem Ausscheiden der Bandenlinie gut zur Deckung bringen, und zwar sowohl das Gleichstrom- als auch das Funkenbild. (Fig. 8, S. 774.) In beiden Fällen sind hier durch die Bedingungen

$$m \geq n, \quad m' \geq n'$$

die theoretischen Komponenten IIa, IIIa und IIIb ganz ausgeschaltet, die Komponenten Ic, d und IId erscheinen „bedingt“, d. h. schwach, so daß sich alle beobachteten Komponenten in dies Schema ohne weiteres einordnen lassen. Daß die Komponente IIc, wie gesagt, nicht beobachtet worden ist, obwohl sie nach dieser Auffassung erscheinen sollte, hat nichts Auffallendes, da die benachbarten Linien nur eine Aufspaltung von 0,1 ÅE. haben, zwischen denen eine weitere Linie getrennt zu sehen nur mit noch wesentlich größerer Dispersion, als bisher angewandt, möglich wäre.

Die beobachteten Intensitäten der einzelnen Linien zeigen allerdings Abweichungen gegenüber dem theoretischen Schema. Paschen hat im Gleichstrombild die Helligkeit der Linie 4685,812 kleiner gemessen, als die der Linie 4685,709, während das Intensitätsverhältnis dieser beiden Hauptlinien im Funkenbild nach seinen Beobachtungen umgekehrt ist. Ich habe diese Abstufungen nicht beobachten können, sondern in beiden Fällen fast völlige Gleichheit der beiden Komponenten gefunden. (Vgl. die Kurvenbilder 3, 6 und 7, Tafel V und VI.) Ob dies auf von den Paschenschen abweichende Erzeugungsbedingungen zurückzuführen ist, habe ich nicht feststellen können.

1) Vgl. S. 778 Anm.

Beide Befunde sind in jedem Fall nach der Sommerfeldschen Theorie unerwartet, da die Linie 4685,812, wenn sie als Ia, b richtig gedeutet ist, merklich stärker sein sollte, als die Linie 4685,709, die nur die Komponente IIb enthält. Es bleiben also auch da Schwierigkeiten, die nicht geklärt sind.

Nimmt man trotzdem diese Deutung einstweilen als richtig an, so bleiben für die Berechnung von $\Delta\nu_H$ folgende Komponentenabstände möglich:

Funken- und Gleichstrombild (beste Mittelwerte)

| | $\Delta\lambda$ ÅE. beob. | Entspricht | Daraus $\Delta\lambda_{\infty}$ ÅE. | Gewicht |
|----------|------------------------------|--------------------------------------|--|---------|
| IIIc—IIb | 0,306 | $4,074 \cdot \Delta\lambda_{\infty}$ | 0,07511 | 3 |
| IIIc—Ia | 0,409 | $5,321 \cdot \Delta\lambda_{\infty}$ | 0,07687 | 3 |
| IIId—IIc | 0,360 | $4,741 \cdot \Delta\lambda_{\infty}$ | 0,07594 | 1 |

Mittel: 0,07598

$$\text{Daraus } \Delta\nu_H = \frac{0,07598}{4687^{\frac{1}{2}},0} 10^8 = 0,3459 \pm 0,005 \text{ cm}^{-1}.$$

Zu dieser Rechnung ist zu bemerken, daß die Fehlerangabe (die äußerste Abweichung vom Mittelwert) ziemlich bedeutungslos ist, solange die Zuordnung der einzelnen Linien nicht ganz einwandfrei festliegt. Bei Annahme der oben benutzten Zuordnung, die bis auf Ausschaltung der Bandenlinie und der von mir nicht sicher beobachteten theoretischen Linie Id mit der von Paschen angewandten identisch ist, ergibt sich jedenfalls schon ein $\Delta\nu_H$ -Wert, der um 5 Proz. kleiner ist, als der von Paschen errechnete. Es zeigt sich, daß dieser größere Wert nur durch die Einbeziehung der inzwischen als Bandenlinie erkannten Linie 4685,307 entstanden war.

Es kann nicht Aufgabe dieser Experimentalarbeit sein, zu den erwähnten verschiedenen theoretischen Deutungsmöglichkeiten dieser Liniengruppe und der Frage der beiden Auswahlprinzipien entscheidend Stellung zu nehmen. Wie gezeigt wurde, ergeben sich jedem Deutungsversuch gewisse, bisher nicht behobene Schwierigkeiten.¹⁾

1) Nach Abschluß dieser Untersuchung, über deren Hauptergebnisse Herr E. Gehrecke auf dem Danziger Physikertage (Phys. Zeitschr. 26. S. 675. 1925) im September 1925 berichtet hatte, erschien eine Arbeit von Goudsmit und Uhlenbeck, Physica 5. S. 266. 1925, sowie eine

5. Vergleich mit der Liniengruppe 3203

Bei der Gruppe 3203 sind die Feinstrukturen, wie an früherer Stelle gesagt wurde, weniger genau definiert, als bei der vorhergehenden Gruppe.

Die Formel

$$\nu = 4 N_{\text{He}} \left\{ \frac{1}{(n + n')^2} - \frac{1}{(m + m')^2} \right\}$$

liefert hier für $n + n' = 3$ und $m + m' = 5$ aus dem konstanten Term wieder ein Triplett mit den Abstandsverhältnissen 1 : 3, und aus dem variablen Term je ein Quintett mit den

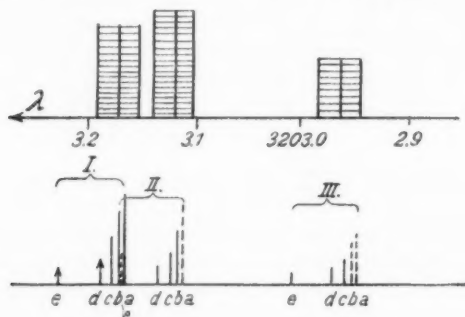


Fig. 12. Gleichstrombild λ 3203

Abständen 3 : 5 : 10 : 30. Der Umfang der Quintette ist schon so klein, daß eine Überlagerung nur noch bei der schwachen theoretischen Komponente IIe (untere Reihe der Fig. 12) stattfindet, die zwischen den starken Komponenten Ia und Ib liegen müßte und daher für die Deutung des Gesamtbildes belanglos ist.

Für den Vergleich mit dieser theoretischen Struktur kommt bei 3203 nur das Gleichstrombild in Frage, da im Funkenbild die Verwaschenheit der Linien jede feinere Aufspaltung

Untersuchung von Sommerfeld und Unsöld, Ztschr. f. Physik 36. S. 259. 1926. Die Spektren von Wasserstoff und Helium werden hier, unter Verlassen des früheren Standpunktes, nach dem Schema der Alkalien aufgefaßt, wodurch das ursprüngliche Bohr-Kramerssche Auswahlprinzip Abänderungen erfährt. Es scheinen mir jedoch auch bei Annahme der neuen Sommerfeld-Unsöld'schen Auffassung Schwierigkeiten für die Deutung des Linienbildes 4686, besonders für die Intensitätsverhältnisse, bestehen zu bleiben.

ausschließt. Paschen hat im Gleichstrombilde 5 Linien gefunden; mir war es nur möglich, die drei in Tab. 3, S. 772 genannten Hauptlinien zu erhalten.

Würde man, wie bei der Diskussion der vorhergehenden Gruppe, von jedem Auswahlprinzip absehen und das Haupttriplett als mit den drei α -Komponenten identisch ansehen, so würde man mit dem S. 779 erhaltenen $\Delta\nu_H$ -Wert zu theoretischen Aufspaltungen

$$\Delta\lambda_1 = 0,049 \quad \text{und} \quad \Delta\lambda_2 = 0,147$$

kommen, die also gegenüber den beobachteten etwas zu klein sind.

Nimmt man dagegen wieder die Sommerfeldschen Auswahlbedingungen zu Hilfe, so würde nach Fig. 12 die Zuordnung der Linien folgendermaßen erfolgen müssen:

| | | |
|----------|-------------|------------|
| 3203,169 | entspricht: | Ia, b, (c) |
| 3,118 | „ | II b, c |
| 2,961 | „ | III c, (d) |

Die theoretischen Abstände werden in diesem Fall, bei Annahme des S. 781 berechneten $\Delta\nu_H$ -Wertes:

$$\Delta\nu_H = 0,3459 \text{ cm}^{-1}, \quad \Delta\lambda_{\omega} = 0,03551 \text{ \AA E.}$$

| | | |
|---------------|--|------------|
| | | beobachtet |
| Ia, b—II b, c | $= 1,4778 \Delta\lambda_{\omega} = 0,058 \text{ \AA E.}$ | 0,051 |
| II b, c—III c | $= 4,5700 \Delta\lambda_{\omega} = 0,162 \text{ \AA E.}$ | 0,157 |

Selbst mit dem kleineren $\Delta\nu_H$ -Wert würden also die theoretischen Linienabstände noch um einen geringen Betrag größer ausfallen als die beobachteten; dies stimmt genau mit dem überein, was sich bereits aus den früheren Paschenschen Messungen ergeben hatte. Die Abweichungen zwischen theoretischen und experimentell gefundenen Linienabständen liegen aber bei Annahme des kleineren $\Delta\nu_H$ -Wertes bereits unmittelbar an der Fehlergrenze.

Ich lege den Messungen an dieser Liniengruppe, die bei der Winzigkeit des Objekts naturgemäß von geringerer Genauigkeit sind, keine besondere Beweiskraft bei. Immerhin zeigen sie doch, daß die Folgerungen, die an das Linienbild von 4686 geknüpft worden sind, sich im wesentlichen auch auf diese Gruppe übertragen lassen.

Nach dem Bohr-Kramerschen Auswahlprinzip waren im Linienbilde von 3203 die Komponenten Ie und IIIe, die

Paschen beobachtet hat, unerklärlich. Greift man dagegen, wie es oben geschehen ist, auf das ursprüngliche Sommerfeldsche Schema zurück, so fügen sich diese Linien gut in das theoretische Bild. Die Intensitätsverhältnisse sind allerdings auch hier noch ungeklärt. —

Zusammenfassend kann über die Beobachtungen an den Feinstrukturen folgendes gesagt werden:

1. Die bisher als Bestandteil der Seriengruppe 4686 angesehene Linie 4685,309 gehört dem Gruppenverband nicht an, sondern ist ein Glied einer übergelagerten Heliumbande.

2. Nach Fortnahme dieser Linie unterscheiden sich Gleichstrom- und Funkenbild der Gruppe nur noch durch Linienbreite und Abstufung der Intensitäten, nicht mehr durch Anzahl der Komponenten.

3. Das Bohr-Kramerssche Auswahlprinzip scheint nicht verwirklicht. Trotz gewisser Abweichungen in den zu erwartenden Intensitäten ist das experimentell erhaltene Linienbild noch am besten mit dem ursprünglichen Sommerfeldschen Feinstrukturschema in Übereinstimmung zu bringen.

4. Der hiernach errechnete theoretische Wert von $\Delta\nu_H$ ist $0,3459 \text{ cm}^{-1}$, also kleiner als der von Paschen gemessene.

5. Auch die Beobachtungen an der Liniengruppe 3203 lassen sich mit dem kleineren $\Delta\nu_H$ -Wert besser zur Deckung bringen, als mit dem größeren.

III. Untersuchungen am Bandenspektrum des Heliums

Die Klärung des Funkenbildes von 4686 war, wie oben erwähnt, nur möglich durch nähere Untersuchung der übergelagerten Bande. Da das Funkenbild stets auch die Bandenlinien enthielt, so mußte versucht werden, das Bandenspektrum möglichst unter Voraussetzungen zu erzeugen, bei denen die Serienlinien zurücktraten, um dann aus dem Verhalten der Linie 4685,309 auf ihre Zugehörigkeit schließen zu können. Curtis hat die genannte Bande bei 4650 in großer Dispersion aufgelöst¹⁾, und ebenso wie die anderen Banden dieses Spektrums in drei Zweige geordnet. Vom *P*-Zweig dieser Bande hat er 12 Glieder gemessen; für das fünfte Glied fand er die Wellenlänge 4685,308.

1) W. E. Curtis, Proc. Roy. Soc. 103. S. 315. 1923.

Es war also zu untersuchen, ob die bis dahin als Serienkomponente angesprochene Linie mit der von Curtis gemessenen Bandenlinie identisch war, und an den Intensitätsverhältnissen der verschiedenen Bandenlinien untereinander war die Möglichkeit der Überlagerung mehrerer Linien an dieser Stelle nachzuprüfen. Gleichzeitig war, um die Lage der Bandenlinie mit möglicher Genauigkeit zu bestimmen, die Gültigkeit der Formelkoeffizienten, mit denen Curtis den Bandenzweig berechnet hatte, näher zu untersuchen, da sich zeigte, daß bei Curtis die höheren Glieder des Zweiges in den gemessenen Wellenlängen von den errechneten stark abwichen.

So hatte ich Gelegenheit, mich auch sonst eingehender mit dem Bandenspektrum zu beschäftigen und insbesondere Versuche zu machen, allgemein aus den Breiten der Linien dieses Spektrums im Verhältnis zu den Breiten der Serienlinien weiteren Aufschluß über den vermutlichen Träger des Bandenspektrums zu erhalten.

1. Versuchsanordnungen

a) Lichtquellen

Zum ersten Vergleich und zur Identifizierung der in den bisher benutzten Röhren erhaltenen Bandenlinien mit dem von Goldstein beschriebenen Spektrum wurde eine vorhandene, von Goldstein selbst gefertigte Röhre benutzt.¹⁾ Da diese Röhre jedoch für Aufnahmen am großen Gitter zu lichtschwach, außerdem für eingehendere Versuche zu wertvoll war, so wurde eine gleiche Röhre von größeren Ausmaßen gebaut, deren Mittelteil aus einem Glasrohr von 8 mm Innendurchmesser und 35 cm Länge bestand und in Längsdurchsicht benutzt wurde. Versuche mit engen Kapillarröhren mit Außenelektroden, die mit Funkeninduktor betrieben wurden, wurden wieder aufgegeben, da die Kapillaren überwiegend nur ein sehr reines Serienspektrum emittierten, die Bandenlinien aber stark unterdrückten. Auch Versuche mit innen versilberten Röhren hatten keine weiteren Ergebnisse; in Übereinstimmung mit den

1) Diese Röhre hatte die von Goldstein, *Verhandl. d. D. Phys. Ges.* 15. S. 402. 1913 beschriebene Form und wurde mir von Herrn Prof. Gehrecke aus dessen Besitz zur Verfügung gestellt.

Befunden von Janicki und Lau¹⁾ ergab sich, daß die Entstehung des Bandenspektrums beim Helium im Gegensatz zum Viellinienspektrum des Wasserstoffs durch eine Silberschicht im Innern der Röhre nicht merklich gefördert wird.

Die beschriebene Röhre dagegen erwies sich als günstig. Sie wurde mit Helium von 0,5 bis 5 cm Druck gefüllt und zeigte bei Betrieb mit Kapazität und Funkenstrecke ein sehr helles Bandenspektrum. Die Helligkeit der Serienlinien nahm mit steigendem Druck und wachsender Stromdichte gegenüber den Bandenlinien stetig ab, doch wurde auch bei 5 cm Druck und 20 000 cm Kapazität die Serienlinie 4686 noch deutlich erhalten. Bei den meisten photographischen Aufnahmen wurde der Druck auf etwa 3 cm gehalten; ein an die Röhre angeschmolzener Vorratskolben sorgte für Druckkonstanz auch bei länger dauernden Expositionen.

Die Röhre wurde, wie die früheren, mit dem Sekundärstrom eines Transformators betrieben, der an der 120-Volt-wechselstromleitung der Zentrale lag. Als Kapazitäten wurden die schon früher verwandten Glimmerkondensatoren von 10 000 bis 20 000 cm benutzt.

b) Funkenstrecke

Da der Leuchtzustand der Röhre sehr abhängig von der Länge der Funkenstrecke war, so mußte Vorsorge getroffen werden, diese auch bei tagelangem Betrieb konstant zu halten. Ich konstruierte zu diesem Zweck eine rotierende Funkenstrecke, die aus zwei umlaufenden Messingscheiben gebaut wurde. Diese Scheiben wurden mit den Rändern gegeneinander auf Hartgummisockeln gelagert, von denen der eine festlag, während der andere durch eine Feinstellschraube auf dem Grundbrett in einer Schiene beweglich war. Beide Scheibenelektroden waren durch Schnurantrieb miteinander verbunden und wurden durch einen kleinen Elektromotor in Rotation gehalten, so daß sich die Zerstäubung der Scheiben bei Funkenübergang gleichmäßig auf beide Scheibenperipherien verteilte. Die Gesamtlänge des Funkens variierte daher auch bei langdauernden Aufnahmen nur unmerklich; es wurde verhindert, daß der Funke durch punktförmigen Abbrand der Elektroden

1) L. Janicki und E. Lau, Ann. d. Phys. 71. S. 562. 1923.

abriß oder die Funkenstrecke durch die abstäubenden Metallteile geschlossen wurde.

In dieser Anordnung wurde die Röhre zunächst am kleinen 1-m-Gitter, danach am großen Gitter in erster und zweiter Ordnung photographiert.

2. Interferenzaufnahmen des Bandenspektrums und Messung der Linienbreiten

Fig. 13, Taf. VII zeigt in der obersten Reihe (a) eine Übersichtsaufnahme des Bandenspektrums, wie es am kleinen Gitter auf blauempfindlichem Film erhalten wurde. Der Ausschnitt reicht vom Violett der zweiten bis zum Blau der dritten Ordnung. Da das Spektrum sehr lichtstark war, konnte der Versuch gemacht werden, das Gitter mit einer planparallelen Platte zu kreuzen und auf die Weise Interferenzbilder der einzelnen Linien zu erhalten. Mit einer Lummer-Gehrcke-Platte der Reichsanstalt von 4,624 mm Dicke konnten in der positiven Säule die Interferenzen schon okular deutlich gesehen und in ein- bis zweitägigen Aufnahmen auch bei engerem Spalt photographiert werden; das negative Glimmlicht in der Kathode und in ihrer Umgebung zeigte dagegen keine klaren Interferenzen.

In den unteren beiden Reihen der Fig. 13, Taf. VII (b und c) sind derartige Interferenzaufnahmen des obigen Spektrums mit breitem und engerem Spalt wiedergegeben. Geringe in der Röhre vorhandene Wasserstoffreste ließen die ersten Glieder der Balmerreihe mit erscheinen, doch ergaben diese Linien wegen ihrer starken Verbreiterung keine erkennbaren Interferenzen mehr. Erwähnenswert ist an dieser Stelle noch, daß die Röhre von den Balmerlinien fast nur H_β , H_γ , und sehr schwach H_δ zeigte, während H_α nahezu völlig unterdrückt war.

Von einer größeren Anzahl so mit Interferenzstreifen haltener Linien, und zwar sowohl Serien- wie Bandenlinien, wurden nunmehr wieder Photometerkurven des Hamburger Registrierphotometers aufgenommen und ausgemessen. Die Auswertung geschah in folgender Weise:

Da zunächst über die Linearität der Photometerkurven mit den Intensitäten nichts bekannt war, eine Festlegung der Schwärzungscharakteristik für jeden einzelnen Fall, etwa mittels

genauer Intensitätsmarken, sehr umständlich erschien und keine wesentlich größere Genauigkeit erwarten ließ, so wurden aus den verschiedenen Kurven diejenigen Teile herausgesucht, in denen sich die aufeinander folgenden Maxima und Minima je durch eine Gerade verbinden ließen (Fig. 14, Taf. VI). Wenn diese Verbindungslinien sich in der Null-Linie der Schwärzungskurve schnitten, so konnte dieser Teil der Kurve ohne beträchtlichen Fehler als linear angesehen werden, so daß sich aus ihm die Intensitätsverteilung direkt ablesen ließ.

Da viele der erhaltenen Photometerbilder diese Bedingung erfüllten, war es also möglich, unmittelbar die Intensitätsverteilungen der einzelnen Linienbilder graphisch zu konstruieren und deren Halbbreiten zunächst im Verhältnis zum Abstand zweier aufeinander folgender Maxima zu messen.

Aus den Konstanten der benutzten Lummer-Gehrcke-Platte, die an der Reichsanstalt neu bestimmt worden waren¹⁾, konnten dann die Halbbreiten auf ÅE. umgerechnet werden:

Die Dicke der Platte betrug

$$d = 4,6247 \text{ mm};$$

für den Brechungsexponenten wurde die Gleichung

$$n = 1,491524_6 + \frac{73,8125_2}{\lambda - 1655,96}$$

benutzt. Als Abstand zweier Maxima ergab sich dann

$$\Delta \lambda_{\max} = \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2d \left(n^2 - 1 - n \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)}$$

So ergaben sich für die Halbbreiten von 4 Serienlinien und 5 Bandenlinien, die zur Messung herangezogen wurden, folgende Werte:

| Serienlinien | Halbbreiten | Bandenlinien | Halbbreiten |
|-------------------|-------------|-------------------|-------------|
| λ 5015 | 0,166 ÅE. | λ 4685 | 0,143 ÅE. |
| λ 4713 | 0,163 „ | λ 4676 | 0,146 „ |
| λ 4121 | 0,162 „ | λ 4651 | 0,141 „ |
| λ 3964 | 0,165 „ | λ 4642 | 0,136 „ |
| | | λ 4633 | 0,142 „ |
| Mittel: 0,164 ÅE. | | Mittel: 0,142 ÅE. | |

1) L. Janicki und E. Lau, Zeitschr. f. Physik 35, S. 1. 1925.

Die etwas größeren Abweichungen der Einzelmessungen bei den Bandenlinien erklären sich dadurch, daß diese stellenweise so eng beieinander lagen, daß gelegentlich Überlagerungen mehrerer Linien und damit Verzerrungen der Interferenzkurven vorkamen.

In den oben gemessenen Breiten sind noch die durch die Apparatur selbst hervorgerufenen Linienbreiten enthalten. Um diese Fehler zu eliminieren und die reinen, durch Dopplereffekt bedingten Linienbreiten zu erhalten, wurden bekannte Quecksilberlinien in der gleichen Anordnung aufgenommen und deren Breiten in derselben Weise gemessen. Die Dopplerverbreiterung dieser Linien kann vernachlässigt werden und liefert direkt die durch die Apparatanordnung gegebene Breite.

Gemessen wurde als Breite der Quecksilberlinien

$$B_q = 0,061 \text{ \AA E.}$$

Nach Abzug dieses Betrages von den obigen Linienbreiten blieb als reine Dopplerbreite:

$$\text{Für die Serienlinien } B_s = 0,103 \text{ \AA E.}$$

$$\text{Für die Bandenlinien } B_b = 0,081 \text{ \AA E.}$$

Das Verhältnis dieser Zahlen ist

$$B_s : B_b = 1,27 : 1.$$

Die Tatsache, daß *alle* Bandenlinien schmäler gemessen wurden, als die Serienlinien, spricht ähnlich wie die von Curtis durchgeführten Bestimmungen der Trägheitsmomente dafür, daß das He-Atom als Träger des Bandenspektrums unwahrscheinlich ist. Es kommt nur ein mehratomiges He-Molekül in Frage, und zwar liegt der gemessene Wert am nächsten dem für He_2 , dessen Linienbreiten sich zu denen der Serienlinien verhalten sollten wie $1:\sqrt{2} = 1:1,414$. Ein höheratomiges Molekül, etwa He_3 , scheint nach den erhaltenen Linienbreiten weniger wahrscheinlich, da $1:\sqrt{3} = 1:1,732$ bereits beträchtlich größer ist, als der gemessene Wert. Daß der gefundene Breitenunterschied auch mit dem für He_2 zu erwartenden nicht genau übereinstimmt, sondern etwas kleiner gemessen wurde, hat seinen Grund vielleicht darin, daß die Emission des Bandenspektrums möglicherweise gegenüber dem

Serienspektrum phasenversetzt ist und dadurch in ein anderes Temperaturgebiet des emittierenden Gases fällt.

3. Wellenlängenmessungen an Bandenlinien und Vergleich mit Curtisschen Formelkoeffizienten

Wie im Beginn dieses Abschnitts (S. 784/785) gesagt wurde, war es von besonderer Wichtigkeit, die Identität der von Paschen im Funkenbild von 4686 gemessenen Linie 4685,307 mit der Bandenlinie 4685,309 nachzuweisen; es war also eine Durchmessung der Bandenlinien mit der Genauigkeit erforderlich, die Paschen als Fehlergrenzen seiner Messungen angegeben hatte.

Hier ergaben sich insofern gewisse Schwierigkeiten, als das zu messende Bandengebiet sehr viel ausgedehnter war, als der schmale Bereich der Seriengruppe 4686. Gittergeister, wie Paschen sie zu seinen Wellenlängenmessungen verwendet hatte, wurden bei dem von mir benutzten Gitter nur gelegentlich bei starker Überexposition erhalten. Die in Rede stehende Bande erstreckt sich von λ 4627 bis λ 4787, also über 160 ÅE., so daß, um beträchtlichere Fehler auszuschließen, eine größere Zahl einwandfreier Normalen erforderlich war.

Es war daher nötig, zunächst einen Eisenbogen als Vergleichsspektrum heranzuziehen. Da ein solcher aber aus den auf S. 772 erörterten Gründen¹⁾ mit starken Fehlern und Verschiebungen behaftet ist, wurde zur Korrektur folgender Weg eingeschlagen:

Die Eisennormalen wurden nur als Skala für den Gang der Dispersion benutzt, und in dieser Skala interferometrisch gut bekannte Linien des Heliumspektrums gemessen. Im gegebenen Fall wurden die Messungen an die Heliumdoppellinien

$$\begin{aligned} &4713,373 - 4713,143 \quad \text{und} \\ &4471,681 - 4471,479, \end{aligned}$$

ferner an die Einfachlinie

$$4921,930 \quad \text{und} \quad H_{\beta} \, 4861,326$$

1) T. R. Merton und D. N. Harrison: On Errors arising in the Measurement of Unsymmetrical Lines, Proc. Roy. Soc. London (A) 101. S. 431—434. 1922. Nr. 712.

angeschlossen. Innerhalb derselben Aufnahme ergab sich dann an diesen Stellen bis auf 0,002 ÅE. die gleiche Korrektion für die Eisenlinien, und zwischen den so korrigierten Eisenlinien konnten die Heliumbandenlinien gut interpoliert werden.

Die Fehler der auf diese Weise erhaltenen Wellenlängen dürften 0,005 ÅE. nicht überschreiten. Dieselbe Fehlergrenze hat Curtis¹⁾ für seine in diesem Gebiet vorgenommenen Messungen angegeben.

Für den *P*-Zweig der Bande bei 4650 wurden auf diese Weise folgende Wellenlängen erhalten:

Tabelle 4
P-Zweig der Bande 4650

| <i>m</i> | $\lambda_{\text{beob.}}$ | Curtis | <i>m</i> | $\lambda_{\text{beob.}}$ | Curtis |
|----------|--------------------------|--------|----------|--------------------------|--------|
| 1 | — | — | 7 | 4706,815 | + 2 |
| 2 | 4658,792 | — 4 | 8 | 18,603 | + 5 |
| 3 | 66,832 | + 1 | 9 | 31,042 | — 22 |
| 4 | 75,675 | — 2 | 10 | 44,083 | + 9 |
| 5 | 85,309 | — 1 | 11 | 57,671 | — 63 |
| 6 | 95,699 | + 2 | 12 | 71,770 | — 37 |
| | | | 13 | 86,316 | — |

In der letzten Spalte der Tab. 4 sind die Abweichungen von den Curtisschen Messungen in Einheiten der letzten Dezimale angegeben. Es fällt auf, daß die Übereinstimmung mit den Curtisschen Messungen bis zum 8. Gliede eine recht gute ist, daß aber von da an starke Abweichungen auftreten, die weit über die Fehlergrenzen hinausgehen.

Curtis hat, wie für fast alle Banden dieses Gebiets, auch für die vorliegende die Koeffizienten einer Bandenformel berechnet; die nach dieser Formel berechneten Bandenglieder sind mit den beobachteten ebenfalls bis zum 8. Gliede in guter Übereinstimmung, während die höheren Glieder Abweichungen in demselben Sinne wie oben zeigen. Die Differenzen zwischen den beobachteten und den mit seinen Formelkoeffizienten berechneten Schwingungszahlen sind bei Curtis:

1) W. E. Curtis, Proc. Roy. Soc. 103. S. 315. 1923.

| m | $\Delta \nu$ in $0,01 \text{ cm}^{-1}$ | m | $\Delta \nu$ in $0,01 \text{ cm}^{-1}$ |
|-----|--|-----|--|
| 1 | — | 6 | 0 |
| 2 | + 1 | 7 | — 3 |
| 3 | — 2 | 8 | + 1 |
| 4 | 0 | 9 | + 23 |
| 5 | + 2 | 10 | + 32 |

Die weiteren Glieder jenseits $m = 10$, die Curtis nicht mehr aufführt, würden sich von der Formel noch weiter entfernen, aber bereits die Glieder $m = 9$ und $m = 10$ liegen weit außerhalb der angegebenen Fehlergrenze.

Solche aus der Bandenformel herausfallenden Linien bezeichnet Curtis als „gestörte Linien“. Da er derartige Störungen an anderen Banden teilweise von solcher Größenordnung gefunden hat, daß ihr tatsächliches Vorhandensein nicht in Zweifel gezogen werden kann, ist immerhin mit der Möglichkeit zu rechnen, daß auch hier beträchtliche Linienverschiebungen vorliegen.

Da andererseits im vorliegenden Fall die Abweichungen von der von Curtis gegebenen Formel gerade an der Stelle einsetzen, wo meine Wellenlängenmessungen sich von den Curtisschen entfernen, habe ich versucht, mit den von mir gemessenen Werten neue Koeffizienten zu berechnen, die auch die höheren Bandenglieder umfassen sollten. Mit einer Fehlerrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate kam ich dabei zu folgenden Zahlen:

| Koeffizienten von | | Curtis |
|-------------------|-------------|-----------|
| m^0 | + 21 520,60 | + 0,63 |
| m^1 | — 26,746 | — 0,438 |
| m^2 | — 2,16057 | + 0,09022 |
| m^3 | + 0,035983 | — 0,00566 |

Die letzte Spalte dieser Zusammenstellung gibt die Abweichung von den Curtisschen Koeffizienten an.

Berechnet man mit den obigen Koeffizienten nach einer Formel

$$\nu = A + Bm + Cm^2 + Dm^3$$

für $m = 1, 2, 3 \dots$ die zugehörigen ν -Werte und vergleicht

sie mit denjenigen, die sich aus den beobachteten Wellenlängen ergeben, so erhält man folgende Gegenüberstellung:

Tabelle 5

| <i>m</i> | λ vak. aus Beob. | ν vak. | ν berechnet nach Formel. Abweichung der letzten Dezimale |
|----------|--------------------------|------------|--|
| 1 | — | — | — |
| 2 | 4660,092 | 21 458,80 | — 4 |
| 3 | 68,134 | 421,84 | + 5 |
| 4 | 76,980 | 381,32 | + 3 |
| 5 | 86,616 | 337,36 | — 1 |
| 6 | 97,009 | 290,14 | — 3 |
| 7 | 4708,128 | 239,86 | — 1 |
| 8 | 19,919 | 186,60 | — 1 |
| 9 | 32,361 | 131,10 | + 1 |
| 10 | 45,405 | 073,02 | + 4 |
| 11 | 58,997 | 012,83 | + 2 |
| 12 | 73,100 | 20 950,74 | — 4 |
| 13 | 87,649 | 887,08 | (— 27) |

Es zeigt sich also, daß die von mir erhaltenen Beobachtungswerte sich mit den oben angegebenen Koeffizienten bis zum 12. Glied des Bandenzweiges gut in die Bandenformel einfügen lassen, daß nur das letzte beobachtete Glied eine größere Abweichung erkennen läßt. Dieses Glied wurde wie bei Curtis als gestört angesehen und bei der Berechnung außer Betracht gelassen. Ob bei den Messungen von Curtis die Linien vom 9. Gliede an tatsächlich so beträchtliche Störungsverschiebungen erlitten haben, oder ob dort Meßfehler vorlagen, konnte hier nicht entschieden werden; die Curtisschen Berechnungen für die Trägheitsmomente werden durch diese kleinen Abweichungen in keinem Fall berührt.

Nach obiger Aufstellung läßt sich jedenfalls der ganze Bandenzweig, soweit er beobachtet werden konnte, mit Ausnahme des letzten Gliedes formelmäßig darstellen. Es muß zugegeben werden, daß die Deckung der beobachteten Werte mit den Formelwerten in der Mitte des Bandenzweiges am besten ist und nach den beiden Enden hin etwas schlechter wird, was darauf hindeutet, daß auch die hier verwendete Form der Gleichung erst eine Näherung darstellt, die noch verbesserungsbedürftig bleibt. Aber auch an den Bandenenden bleiben die Abweichungen in unmittelbarer Nähe der angegebenen Fehlergrenzen.

Für die fünfte Linie des Bandenzweiges, die hier wegen ihrer Überlagerung mit der Serienlinie 4686 besonders interessiert, ist die Abweichung des errechneten Wertes vom beobachteten äußerst gering. In ÅE. ausgedrückt würde sie 0,002 betragen. Wenn man angesichts der Regelmäßigkeit der Bande die Gesamtheit der Messungen an den Nachbarlinien als Kontrollmessungen für die Linie 4685,309 auffaßt, so kann also auch aus der Bandenformel gefolgert werden, daß der Meßfehler dieser Linie den Betrag von 0,002 ÅE. nicht überschreitet.

Die in Tab. 1 und 2 (S. 768 und 771) für die Seriengruppe 4686 angegebenen Wellenlängen sind, wie dort erwähnt wurde, zunächst an die Heliumdoppellinie 4713, dann aber vorwiegend an die Messungen der Bandenlinien dieses Zweiges angeschlossen worden. Die Interpolation zwischen mehreren Bandenlinien gab immer wieder hinreichende Kontrolle über die Größe der möglichen Fehler.

4. Messungen an weiteren Bandenzweigen

Das Bandengebiet zwischen λ 4600 und λ 4750 (Fig. 10, Taf. VII) zeigte bei stärkerer Exposition noch außerordentlich viele schwache Linien, die bisher noch nicht eingeordnet worden sind. Gezählt wurden in diesem Intervall über 140 Linien.

In der Nachbarschaft des *P*-Zweiges fand ich eine neue schwächere, aber regelmäßig gebaute Bande, für deren Glieder sich folgende Wellenlängen ergaben:

| |
|----------------|
| λ Luft |
| 4692,522 |
| 4701,904 |
| 12,036 |
| 22,778 |
| 34,206 |
| 46,236 |

Diese Wellenlängen wurden ebenso wie auch die der weiter unten erwähnten Bandenzweige in derselben Weise gemessen, wie die der auf S. 791 aufgeführten Linien; Interpolation zwischen den dort angegebenen Wellenlängen des *P*-Zweiges diente als Kontrolle.

Die Intensitäten der hier zusammengestellten Linien nehmen nach größeren Wellenlängen stetig ab; das dritte Glied ist etwas stärker, als die Nachbarglieder erwarten lassen.

Jenseits 4746,236 sind noch sehr schwache Glieder erkennbar, doch war ihre Intensität zu Messungen bereits zu klein.

Es ergab sich, daß die Linienabstände dieser Bande augenscheinlich in Beziehung zu denen des oben untersuchten *P*-Zweiges stehen. Sie lassen sich einigermaßen mit den für den *P*-Zweig berechneten Formelkoeffizienten darstellen, wenn man sie als Zwischenglieder betrachtet und dementsprechend für *m* die Werte 3,5, 4,5, 5,5 usw. einsetzt. Dies zeigt Tab. 6.

Tabelle 6

| <i>m</i> | ν vak. aus Beobachtungswerten | $\nu - 97,58$ berechnet | Diff. |
|----------|-----------------------------------|-------------------------|--------|
| 1,5 | — | — | — |
| 2,5 | — | — | — |
| 3,5 | 21 304,56 | 21 304,48 | + 0,08 |
| 4,5 | 262,03 | 262,19 | - 0,16 |
| 5,5 | 216,33 | 216,55 | - 0,22 |
| 6,5 | 168,07 | 167,77 | + 0,30 |
| 7,5 | 116,98 | 116,07 | + 0,91 |
| 8,5 | 063,46 | 061,68 | + 1,78 |

In der zweiten Spalte sind hier die aus den Beobachtungswerten (S. 794) hervorgehenden Schwingungszahlen angegeben, daneben in der folgenden Spalte die Schwingungszahlen, die sich aus den Formelkoeffizienten der Seite 792 beim Einsetzen der vorstehenden *m*-Werte ergeben. An diesen berechneten Schwingungszahlen ist die Konstante $-97,58$ als Korrektur angebracht, die die Verschiebung der beiden Bandenzweige gegeneinander kennzeichnet. Die Differenzen zwischen den auf diese Weise berechneten und den aus Beobachtungen erhaltenen Schwingungszahlen sind in der letzten Spalte angegeben. Sie zeigen zwar einen nicht befriedigenden Gang, doch kann diese Form der Wiedergabe immerhin als Näherung aufgefaßt werden.

Eine weitere, allerdings nur kurze Linienfolge wurde bei λ 4688 gefunden. Ihre Wellenlängen und Schwingungszahlen sind folgende:

Tabelle 7

| λ Luft | ν vak. | $\Delta\nu_1$ | $\Delta\nu_2$ |
|----------------|------------|---------------|---------------|
| 4688,227 | 21 324,08 | 29,74 | 5,62 |
| 92,519 | 304,57 | 24,12 | 4,61 |
| 97,839 | 280,45 | 19,51 | |
| 4704,413 | 250,71 | | |

Eine Formelberechnung für diese Linien erschien angesichts der Kürze der Serie nicht von Wert; sie wurden hauptsächlich darum genau durchgemessen, weil die erste von ihnen ebenfalls in enger Nachbarschaft der Seriengruppe 4686 liegt. Eine Überlagerung mit dem Funkenbild von 4686 kommt hier nicht mehr in Frage. —

In demselben Gebiet liegt noch ein weiteres regelmäßiges Gebilde: Bei λ 4670 wurde eine auch nur aus vier Gliedern bestehende Dublettserie gefunden. Ihre Wellenlängen sowie die zugehörigen Vakuumschwingungszahlen sind in nachstehender Tabelle angegeben.

Tabelle 8

| Intens. | λ beob. | ν vak. | $\Delta\nu$ der Dubletts | $\Delta\nu$ der Einzelglieder |
|---------|-----------------|------------|--------------------------|-------------------------------|
| 2 | 4670,708 | 21 404,08 | 3,12 | |
| 1 | 71,384 | 400,96 | | |
| 2 | 77,163 | 374,52 | 2,21 | 28,65 |
| 1 | 77,646 | 372,31 | | |
| 1 | 83,588 | 345,20 | 1,37 | 28,48 |
| 1 | 83,888 | 343,83 | | |
| 1 | 89,637 | 317,66 | 1,49 | 27,66 |
| 0 | 89,966 | 316,17 | | |

Die vorletzte Spalte dieser Tabelle gibt die Differenzen der Schwingungszahlen der einzelnen Dublettlinien untereinander an, die letzte Spalte die Differenzen von einem Dublett zum folgenden.

Das vorletzte Dublett ist also etwas enger, als es nach der Folge der anderen Linien sein sollte, doch sind Verschiebungen dieser Größenordnung von Curtis auch an einfachen Bandenlinien beobachtet worden.

5. Bandengebiet bei λ 4140

Das linienreiche Gebiet zwischen λ 4135 und λ 4210 ist bisher in den Curtisschen Aufstellungen über die Heliumbanden nicht erwähnt worden; bei näherer Untersuchung zeigte sich auch, daß die Linienanordnung in diesem Gebiet eine wesentlich andere ist, als in den anderen Bandengebieten.

Gemessen wurden in diesem Intervall 36 Linien, von denen wenigstens 21 in einigermaßen regelmäßige Reihen ge-

ordnet werden konnten. Jedoch war für diese Einzelzweige kein gemeinsamer Nullpunkt auffindbar, auch scheinen Störungen hier stärker aufzutreten, als in den früher betrachteten Banden.

Die Wellenlängen wurden in ähnlicher Weise wie früher gegen die Eisenlinien

4191,441 4147,677 4118,552

gemessen und mit Hilfe der Heliumlinien

4143,759 und 4120,989—4120,817

korrigiert. So wurden folgende Serien erhalten:

Tabelle 9

| Int. | λ Luft | ν vak. | $\Delta \nu_1$ | $\Delta \nu_2$ |
|------|----------------|------------|----------------|----------------|
| 1 | 4134,747 | 24 178,48 | | |
| 0—1 | 38,127 | 58,73 | 19,75 | 2,20 |
| 1 | 41,892 | 36,78 | 21,95 | 2,25 |
| 2 | 46,001 | 12,58 | 24,20 | |
| 2 | 4156,168 | 24 053,87 | | |
| 3 | 56,844 | 049,95 | 3,92 | 0,66 |
| 3 | 57,636 | 045,37 | 4,58 | 0,67 |
| 3 | 58,544 | 040,12 | 5,25 | 0,01 |
| 3 | 59,454 | 034,86 | 5,26 | 1,56 |
| 2 | 60,635 | 028,04 | 6,82 | 1,24 |
| 1 | 62,031 | 019,98 | 8,06 | 1,58 |
| 0—1 | 63,703 | 010,34 | 9,64 | |
| 1 | 4160,225 | 24 030,41 | | |
| 1 | 71,127 | 23 967,60 | 62,81 | + 3,35 |
| 2 | 82,674 | 901,44 | 66,16 | — 0,59 |
| 1 | 94,179 | 885,87 | 65,57 | + 6,16 |
| 0—1 | 4206,840 | 764,14 | 71,73 | |
| 1 | 4163,806 | 24 009,74 | | |
| 2 | 75,558 | 23 942,17 | 67,57 | + 4,84 |
| 2 | 88,224 | 869,76 | 72,41 | — 3,22 |
| 1 | 4200,400 | 800,57 | 69,19 | |

Die erste der hier aufgeführten Liniengruppen liegt getrennt von den übrigen und umschließt die Serienlinie He 4143,759. Die drei anderen Gruppen überlagern sich teilweise; auf eine Linie der dritten Gruppe folgt beispielsweise immer eine Linie der vierten. Die vierte Gruppe wieder schließt sich unmittelbar an die zweite derart, daß deren letztes Glied mit dem ersten Glied der vierten Gruppe nahezu zusammenfällt.

Von einer Formelberechnung für diese Linienfolgen wurde wegen der offensichtlichen Gestörtheit mehrerer Linien Abstand

genommen, da über die möglichen Größen dieser Störungen Näheres bisher nicht bekannt ist. In den ersten Differenzen der Schwingungszahlen erscheint die Regelmäßigkeit der Banden meist noch gut, doch werden die Störungen in den zweiten Differenzen sofort deutlich, wie aus der letzten Spalte obiger Tabelle hervorgeht. Besonders auffällig ist die zweite der oben aufgeführten Banden, die in den ersten Differenzen so regelmäßig erscheint, daß eine irrtümliche Linienzuordnung kaum möglich sein dürfte. Die zweiten Differenzen dagegen sind zunächst konstant, um dann plötzlich für ein Glied Null zu werden und schließlich wieder einen nahezu konstanten, aber größeren Wert zu erreichen.

In den letzten beiden Gruppen ist die Regelmäßigkeit wenig befriedigend; eine andere Zuordnung erschien jedoch nicht möglich.

Ergebnisse

Die Gesamtergebnisse der in vorstehender Arbeit dargestellten Untersuchung können etwa folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Die Feinstruktur der ersten beiden Glieder der Fowlerserie des Heliums ist erneut mit einem Gitter großer Dispersion untersucht worden. Die erhaltenen Linienbilder ergaben dabei völlige Übereinstimmung mit den früher von Paschen gefundenen; das Funkenbild von He 4686 erwies sich jedoch von einer Heliumbande überlagert, wobei sich zeigte, daß die bisher als Funkenkomponente von 4686 angesprochene Linie 4685,307 ein Bestandteil der Bande ist. Es ergaben sich hieraus Rückschlüsse auf die zur Deutung der Linienbilder benutzten Auswahlprinzipien. Am besten konnte mit dem verbleibenden Linienbilde das ursprüngliche Sommerfeldsche Auswahl-schema zur Deckung gebracht werden.

2. Im Anschluß an diese Untersuchung wurde das Gebiet der überlagerten Banden näher studiert, wobei mittels Interferenzaufnahmen die relativen Breiten der Serien- und Bandenlinien gemessen wurden. Das Breitenverhältnis wurde zu 1:1,27 bestimmt; als wahrscheinlichsten Träger für das Bandenspektrum wurde hieraus auf ein He_2 -Molekül geschlossen. Es wurden Ergänzungszweige zu den von Curtis

gemessenen Banden gefunden; die Genauigkeit der von Curtis zur Darstellung der Bande bei λ 4650 benutzten Formelkoeffizienten wurde nachgeprüft und stellenweise ebenfalls erweitert. Ferner wurde ein bisher nicht näher beschriebenes Bandengebiet bei λ 4140 durchgemessen und in mehrere regelmäßige Linienfolgen geordnet.

Allen denjenigen, die mich bei der Durchführung dieser Arbeit in freundlichster Weise unterstützt haben, möchte ich an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank aussprechen. In erster Linie meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. E. Gehrcke, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gab und sie in ihrem ganzen Verlauf mit seinem fördernden Interesse begleitete. Ferner besonders den Herren Reg.-Rat Dr. L. Janicki und Reg.-Rat Dr. E. Lau, denen ich viele wertvolle Anregung und Unterstützung verdanke. Hrn. Reg.-Rat Dr. Heuse, der mir besonders reine Heliummengen aus seinen Vorräten zur Verfügung stellte, bin ich zu großem Dank verpflichtet. Ebenso Hrn. Prof. Dr. P. P. Koch in Hamburg, der mir gestattete, am großen Registrierphotometer des Hamburger Physikalischen Staatslaboratoriums Photometrierungen meiner Aufnahmen auszuführen. Hrn. Dr. Kuhlmann danke ich für seine Mühe-waltung, daß er viele solcher Photometrierungen für mich ausführte.

Schließlich habe ich noch besonderen Dank den Herren Präsidenten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Geheimrat Dr. W. Nernst und Prof. Dr. F. Paschen auszusprechen, die mir an der Reichsanstalt Gastfreundschaft gewährten und mir die Laboratoriumsmittel zur Durchführung meiner Arbeit zur Verfügung stellten.

(Eingegangen 14. September 1926)

2. Zur Theorie der Radiometerwirkungen II¹⁾; von Theodor Sexl

§ 1. Kürzlich¹⁾ habe ich für Radiometerwirkungen, die durch ein lineares Temperaturgefälle im Gase entstehen, eine allgemeingültige Radiometertheorie entwickelt. Dadurch wurde das von Maxwell, Boltzmann, E. und A. Einstein u. a. behandelte Problem seiner Lösung zugeführt. Die Theorie, die auf den Bauleschen²⁾ Vorstellungen über die Wechselwirkung zwischen festem Körper und Gasmolekülen basiert, liefert die allgemein anwendbare Formel

$$\mathfrak{R} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \sqrt{\frac{M}{RT}} \left(\frac{1 + \alpha \nu}{1 - \alpha \nu} \frac{1}{n + 4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n + 5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right).$$

Es ist jedoch zu beachten, daß diese Formel an sich ein leeres Schema darstellt und erst nach Berechnung von $\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ für den jeweils vorliegenden speziellen Fall auf Experimente angewandt werden kann. Diese Formel wurde von mir in der vorhergehenden Arbeit auf das „absolute“ Manometer angewandt, wo bekanntlich $\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{T_1 - T_2}{\gamma_1 + \gamma_2 + d}$ ist, und von Hrn. Sterntal in seiner Dissertation³⁾ auf das Einplattenradiometer, zu welchem Zweck er $\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ für diesen speziellen Fall berechnete. Mit der Entwicklung dieser Formel war gleichzeitig, wie bereits in der vorhergehenden Arbeit erwähnt, die Diskrepanz zwischen Theorie und Experimenten von W. Gerlach und E. Madelung aufgehoben, da jetzt sowohl Theorie wie Experiment Proportionalität des Radiometerausschlages mit der Differenz der Wärmeströme liefert.

Von der hier behandelten Gruppe von Radiometerwirkungen, die durch das lineare Temperaturgefälle im Gase

1) Vgl. Ann. d. Phys. 80. S. 515. 1926.

2) B. Baule, Ann. d. Phys. 44. S. 145. 1914.

3) In der Ztschr. für Phys. im Druck befindlich.

entstehen, ist streng zu unterscheiden eine zweite Gruppe von Radiometerwirkungen, bei denen längs der Berührungsfläche des Gases und des festen Körpers ein Temperaturgefälle längs der Fläche besteht und bei denen das Gas in eine materielle Strömung von Stellen niedriger zu Stellen höherer Temperatur gerät. Die Theorie dieser Erscheinungen hat kürzlich G. Hettner¹⁾ gegeben.

Hier sollen nun einige Ergänzungen angegeben werden, dahingehend, daß einerseits die gewonnene Formel auf das Problem der Kraftwirkung auf eine im stationären Wärmestrom eingebettete, gegen die mittlere Weglänge sehr kleine, Kugel angewandt wird, andererseits sollen einige Ergänzungen und Verallgemeinerungen zur Theorie des „absoluten“ Manometers angegeben werden.

§ 2. Betrachten wir eine im linearen, stationären Wärmestrom eingebettete Kugel, die gegen die mittlere freie Weglänge sehr klein sein soll, so wird durch die Anwesenheit der Kugel das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz im freien Gase nicht gestört. Bezeichnen wir den Winkel zwischen der Richtung des Wärmestromes und der äußeren Normale eines Oberflächenelementes dS der Kugel mit ϑ , so ist die Kraft, die auf das Oberflächenelement ausgeübt wird, $\Re \cos \vartheta \cdot dS$. Wird über die ganze Kugel integriert, so erhält man

$$\int \Re \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

(Eine strenge Berechnung findet man im Anhang.)

Auf eine im linearen, stationären Wärmestrom eingebettete, gegen die mittlere freie Weglänge sehr kleine Kugel wird also keine Kraft ausgeübt. Dieses Resultat ist im Widerspruch mit Plausibilitätsbetrachtungen A. Einsteins²⁾, der eine positive Kraftwirkung errechnete. Man erhält jedoch sofort das hier angegebene Resultat, wenn man berücksichtigt, daß im Gase konstanter Druck herrschen muß und deshalb fallender Temperatur steigende Dichte entspricht. Auf einen kleinen Körper von der Flächenausdehnung σ geben daher die Moleküle in Richtung des Wärmestromes den Impulsüberschuß ab

$$\Re \sim \sigma (n_+ u_+ \cdot m u_+ - n_- u_- \cdot m u_-),$$

1) G. Hettner, Ztschr. f. Phys. 27. S. 12. 1924.

2) A. Einstein, Ztschr. f. Phys. 27. S. 1. 1924.

wenn Geschwindigkeit und Anzahl der Moleküle für Stellen höherer Temperatur mit dem Index + und entsprechend für Stellen niedrigerer Temperatur mit dem Index - bezeichnet werden. Dann wird

$$\mathfrak{R} \sim \sigma m (n_+ u_+^2 - n_- u_-^2) = 0,$$

denn

$$n(x) k T(x) = p = \text{const.}$$

Dieses Resultat wird anschaulich durch die Überlegung, daß ganz allgemein eine Radiometerwirkung ja nur dann auftreten kann, wenn $\alpha \frac{\partial T}{\partial x}$ auf beiden Seiten von σ verschiedene Werte annimmt, mit anderen Worten eine Temperaturdifferenz zwischen beiden Seiten besteht.¹⁾

§ 3. Wir wenden uns nun Betrachtungen über das „absolute“ Manometer zu. Die Rechnungen in voriger Arbeit beruhten auf der Annahme, daß beide Platten gleich beschaffen seien. Läßt man diese Voraussetzung fallen, so gelangt man durch eine Verallgemeinerung der Bauleschen Vorstellungen zu folgender Formel, deren ausführliche Ableitung hier jedoch nicht angegeben werden soll:

$$\mathfrak{R} = \frac{p}{2} \left\{ \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 + \frac{\alpha_2 v_2 - \alpha_1 v_1}{1 - \alpha_1 v_1 \alpha_2 v_2} \frac{T_1 - T_2}{2 T_2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 v_1 (1 - \alpha_2 v_2)}{1 - \alpha_1 v_1 \alpha_2 v_2} \frac{(T_1 - T_2)^2}{2 T_1 T_2} \right\}.$$

Hierin bedeuten p den im gleichtemperierten Raum gemessenen Gasdruck, T_1 und T_2 die Temperaturen der beiden Platten, $\alpha_1 = \frac{m^2 + m_1^{*2}}{(m + m_1^*)^2}$ und entsprechend α_2 , wobei m_1^* und m_2^* die Massen bzw. eines Wandmoleküls, m die Masse eines Gasmoleküls ist und schließlich v_1 und v_2 die Bruchteile der Anzahl der Moleküle, die von den auf die beiden Platten auf fallenden Gasmolekülen nach einmaligem Zusammenstoß mit einem Wandmolekül in den Gasraum zurückgeworfen werden. $1 - \alpha_1 v_1$ ist gleich a_1 und $1 - \alpha_2 v_2 = a_2$, wenn mit a_1 und a_2 die beiden Akkommodationskoeffizienten bezeichnet werden.

Für kleine Temperaturdifferenzen ist

$$\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} - 1 = \frac{T_1 - T_2}{2 T_2}$$

1) Auch das zweite Resultat Einsteins (a. a. O., § 2) korrigiert sich auf Grund obiger Überlegungen leicht in $\nu_p = \nu_n$.

und daher

$$\mathfrak{R} = \frac{p}{4} \frac{T_1 - T_2}{T_2} \frac{(1 - \alpha_1 \nu_1)(1 + \alpha_2 \nu_2)}{1 - \alpha_1 \nu_1 \alpha_2 \nu_2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_1 \nu_1 (1 - \alpha_2 \nu_2)}{(1 - \alpha_1 \nu_1)(1 + \alpha_2 \nu_2)} \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right\} \\ = \frac{p}{4} \frac{T_1 - T_2}{T_2} \frac{\alpha_1 (2 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 (1 - \alpha_1)}{\alpha_1 (2 - \alpha_2)} \frac{T_1 - T_2}{T_1} \right\}.$$

Hier sieht man besonders deutlich, wie wenig der Name „absolutes“ Manometer gerechtfertigt ist, da bereits im Hauptgliede Materialkonstanten eingehen.

Wie bereits in voriger Abhandlung erwähnt, sollte die zu Beginn dieser Arbeit angegebene Formel in den eben abgeleiteten Ausdruck für das „absolute“ Manometer übergehen, wenn für $\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ der bei tiefen Drucken gültige Wert, wo die Plattendistanz d gegenüber der mittleren freien Weglänge vernachlässigt werden kann, eingesetzt wird. Daß dies tatsächlich der Fall ist, übersieht man leicht, wenn man \mathfrak{R} in der Form

$$\mathfrak{R} = \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{k}{2} (N + N^* + N') \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{4}{5} \right) = \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial x} \frac{p}{T_2} \left(1 - \frac{8}{5\pi} \right)$$

schreibt und für $\gamma_2 \frac{\partial T}{\partial x}$ seinen Wert

$$\gamma_2 \frac{\partial T}{\partial x} = \gamma_2 \frac{T_1 - T_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{T_1 - T_2}{2} \frac{(1 - \alpha_1 \nu_1)(1 + \alpha_2 \nu_2)}{1 - \alpha_1 \nu_1 \alpha_2 \nu_2}$$

einsetzt. Man erhält dann

$$\mathfrak{R} = \frac{p}{4} \frac{T_1 - T_2}{T_2} \frac{(1 - \alpha_1 \nu_1)(1 + \alpha_2 \nu_2)}{1 - \alpha_1 \nu_1 \alpha_2 \nu_2}$$

und somit für $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ genau die Knudsen'sche Formel.

Würde man nun bei der Ableitung des Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes¹⁾ auch die Glieder zweiter Ordnung in $\partial T / \partial x$ berücksichtigen, wie dies Edith Einstein²⁾ getan hat, und die Radiometerwirkung unter Berücksichtigung dieser Glieder zweiter Ordnung berechnen, so findet man

$$\mathfrak{R} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \sqrt{\frac{M}{R T}} \cdot c + \kappa^2 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \frac{M}{R T} \frac{1}{p} \cdot c_1,$$

1) Vgl. Ann. d. Phys. 80. S 521—23. 1926.

2) E. Einstein, Ann. d. Phys. 69. S. 241. 1922.

wo c und c_1 numerische Konstante sind. Allerdings ist diese Rechnung bereits inkonsequent, da die Bauleschen Vorstellungen nur Glieder erster Ordnung in Betracht zu ziehen gestatten. Setzt man hier wieder den für tiefe Drucke geltenden Wert von $\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ ein, so liefert das Edith Einsteinsche Glied zweiter Ordnung in $\partial T / \partial x$ bis auf einen belanglosen Zahlenfaktor das Korrektionsglied in der Formel für das „absolute“ Manometer. Auch von dieser Betrachtung aus wird es also klar, daß die Formel für hohe Drucke ein Glied erster Ordnung in $\partial T / \partial x$ enthalten muß.

Schließlich noch einige Worte zu Berechnungen M. v. Smoluchowskis¹⁾ zur Theorie des „absoluten“ Manometers. Smoluchowski bezeichnet die Geschwindigkeiten, welche den Wandtemperaturen entsprechen, mit C_1 und C_2 , die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Moleküle tatsächlich bewegen, mit c_1 und c_2 und berechnet aus den Gleichungen

$$c_1^2 - c_2^2 = a_2 (c_1^2 - C_2^2) = a_1 (C_1^2 - c_2^2),$$

c_1 und c_2 als Funktionen von C_2 . (Außerdem geht natürlich $C_1^2 - C_2^2$ ein.) Werden diese Funktionen nach $\frac{C_1^2 - C_2^2}{C_2^2}$ in eine Reihe entwickelt und in die Formel, welche die Radiometerwirkung liefert, eingesetzt, so heben sich die Glieder erster Ordnung weg, die Glieder zweiter Ordnung liefern das Hauptglied und die dritter Ordnung das Korrektionsglied. Den Bauleschen Vorstellungen über die Wechselwirkung zwischen Gas und festem Körper entsprechend, muß man jedoch c_1 als Funktion von C_1 und c_2 als Funktion von C_2 berechnen. Man erhält die beiden symmetrischen Gleichungen:

$$c_1 = C_1 \left(1 - \frac{a_2 - a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \frac{C_1^2 - C_2^2}{C_1^2} \right)^{1/2}$$

$$c_2 = C_2 \left(1 + \frac{a_1 - a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \frac{C_1^2 - C_2^2}{C_2^2} \right)^{1/2}.$$

Verfährt man weiter ebenso wie Smoluchowski, dann liefern jetzt die Glieder erster Ordnung das Hauptglied, die zweiter

1) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 35. S. 1001. 1911.

Ordnung das Korrektionsglied und erhält schließlich genau die oben angegebene Formel.¹⁾

§ 4. Wie ich nachträglich bemerkte, haben bereits H. Bolza, M. Born und Th. v. Kármán²⁾ die Diffusion in hochverdünnten Gasen nach einer mit der später von Baule angewandten Methode im wesentlichen identischen Methode behandelt, so daß die in der ersten Arbeit angekündigte Veröffentlichung meiner in dieser Richtung angestellten Rechnungen überflüssig erscheint.

Anhang

Wir geben hier noch eine strenge Berechnung der in § 2 behandelten Kraftwirkung auf eine gegen die mittlere freie Weglänge sehr kleine Kugel, wenn im Gase ein linearer, stationärer Wärmestrom $-\alpha \frac{\partial T}{\partial n}$ besteht. Dann lautet das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz im freien Gase:

$$F = A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \left\{ 1 + a \left(\frac{\partial T}{\partial n} \alpha \xi + \frac{\partial T}{\partial n} \beta \eta + \frac{\partial T}{\partial n} \gamma \zeta \right) + b (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \left(\frac{\partial T}{\partial n} \alpha \xi + \frac{\partial T}{\partial n} \beta \eta + \frac{\partial T}{\partial n} \gamma \zeta \right) \right\},$$

worin α, β, γ die Richtungskosinusse von $\frac{\partial T}{\partial n}$, $a = \frac{4}{q} \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 \kappa$ und $b = -\frac{8}{5q} \left(\frac{m}{2kT} \right)^3 \kappa$ bedeuten. [Dabei wurden die Glieder mit x, y, z (vgl. a. a. O., S. 523) weggelassen, da sie zur Impulsberechnung der auffallenden Moleküle keinen Beitrag geben, da im Gase konstanter Druck herrscht (vgl. a. a. O., S. 520).]

1) Bei dieser Gelegenheit sei ein Versehen in der ersten Arbeit korrigiert, auf das mich Hr. O. Halpern dankenswerterweise aufmerksam gemacht hat. Die dortige Argumentation, S. 517 „Da nun angenähert $\frac{m}{6} (N_{21} h_{21}^{1/2} + \dots) = \frac{p}{2 h_{11}^{1/2}}$ (strenge gilt diese Relation, wenn der Akkommodationskoeffizient = 1 ist) . . .“ ist dahin zu ändern, daß die eben angeführte Relation immer gilt und aus der Bedingung der Konstanz der Stoßzahl folgt, in enger Analogie mit den Strahlungserscheinungen, für die ja auch dann Gleichgewicht herrscht, wenn die Dichte der einfallenden (oder ausgesendeten) Strahlung überall gleich ist.

2) H. Bolza, M. Born und Th. v. Kármán, Gött. Nachr. 1913, S. 221.

Bezeichnen wir ein Flächenelement der Kugel mit dS und berechnen wir den Impuls, den die auf das Flächenelement auftreffenden Moleküle in einer Richtung, die die Richtungskosinusse α' , β' , γ' hat, ausüben, so ist dieser

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' dS &= - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} m(\alpha' \xi + \beta' \eta + \gamma' \zeta) \xi \cdot F d\xi d\eta d\zeta \cdot dS \\ &= - \dot{m} N \left\{ \frac{\alpha'}{4h} - a \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \frac{1}{2h\sqrt{\pi h}} (\alpha\alpha' + \frac{1}{2}\beta\beta' + \frac{1}{2}\gamma\gamma') \right. \\ &\quad \left. - b \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \frac{3}{2h^2\sqrt{\pi h}} (\alpha\alpha' + \frac{1}{2}\beta\beta' + \frac{1}{2}\gamma\gamma') \right\} dS. \end{aligned}$$

Legen wir nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem in das Flächenelement so, daß die x -Achse mit der äußeren Flächennormale zusammenfällt, die y -Achse senkrecht dazu in der durch die Flächennormale und die Richtung von $\partial T/\partial n$ bestimmten Ebene gelegen ist und berechnen wir die Kraftwirkung in der Richtung von $\partial T/\partial n$, so ist $\alpha = \alpha' = \cos \vartheta$, $\beta = \beta' = -\sin \vartheta$ und $\gamma = \gamma' = 0$. Setzt man für a und b seine Werte ein, so erhält man schließlich

$$\mathcal{R}' dS = - \frac{Nm \cos \vartheta}{4h} dS - \alpha \frac{\partial T}{\partial n} \sqrt{\frac{h}{\pi}} \frac{1}{5} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \cdot dS.$$

Wird jetzt über die ganze Kugeloberfläche integriert, so findet man die gesamte Kraftwirkung zu

$$\mathcal{R} = \int \mathcal{R}' dS = 0,$$

wie in § 2 angegeben.

Universität Wien, III. Phys. Inst., September 1926.

(Eingegangen 10. September 1926)

3. Intensitätsmessungen an Multipletts; von R. Frerichs

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Bonn)

(Hierzu Tafel VIII)

Im Anschluß an eine Reihe von Untersuchungen über die relativen Intensitäten mehrfacher Spektrallinien¹⁾ haben Burger und Dorgelo ganzzahlige Gesetzmäßigkeiten zwischen den Intensitäten der Linien eines Multipletts aufgefunden, die sich zu folgender „Summenregel“ formulieren lassen:

„Die Intensitätssumme aller Komponenten, welche zum gleichen Anfangsniveau (innere Quantenzahl j) gehören, verhalten sich wie die „Quantengewichte“: $2j + 1$ dieses Niveaus; das entsprechende gilt für die Komponenten, welche zum gleichen Endniveau gehören.“²⁾

Diese Regel reicht aus, um in den einfachsten Fällen — Kombinationen einfacher mit mehrfachen Termen, Kombinationen zweier zweifacher Terme — die Intensitäten eindeutig festzulegen und eine große Zahl von Beobachtungen an den verschiedenartigsten Dubletts und Tripletts haben ihre Gültigkeit durchweg bestätigt.¹⁾ Jedoch schon im Falle des „zusammengesetzten Tripletts“ ($p d, d f, \dots$) läßt die Summenregel unbestimmte Parameter offen, deren Zahl mit wachsender Multiplizität beständig zunimmt. Nachdem sich nun gezeigt hatte, daß eine Ergänzungshypothese — die Intensität des Satelliten 2. Ordnung soll möglichst klein, gleich 1 angenommen werden — in dieser ursprünglichen Form fallen zu lassen ist, wurde von

1) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von H. B. Dorgelo, *Phys. Ztschr.* 26. S. 756, 1925.

2) Anschaulich genommen sagt diese Regel: Eine jede der $2j + 1$ Orientierungsmöglichkeiten eines Atoms im Magnetfeld, die sich in den $2j + 1$ Aufspaltungen des betreffenden Terms widerspiegeln, ist als gleichwahrscheinlich anzusehen, so daß das Quantengewicht lediglich abzählt, auf wieviel Arten der betreffende Zustand räumlich realisiert werden kann.

verschiedener Seite das Korrespondenzprinzip¹⁾ zu Hilfe gezogen und in einer Reihe von Arbeiten haben L. S. Ornstein und H. C. Burger, A. Sommerfeld und H. Hönl, R. de L. Kronig und H. N. Russell²⁾ untereinander übereinstimmende Formeln entwickelt, die die Intensitäten der Komponenten eines Multipletts eindeutig im Rahmen der Summenregel festlegen.

Die wenigen bisher vorliegenden Messungen an ausgedehnteren Liniengruppen³⁾ 4) haben die Gültigkeit dieser Formeln nur teilweise zu bestätigen vermocht, insbesondere sind in jüngster Zeit von v. Milaan⁴⁾ Messungen einzelner Eisenmultipletts veröffentlicht worden, die erkennen lassen, daß hier zwar die Summenregel weitgehend erfüllt ist, die Intensitätsformeln jedoch höchstens Näherungswerte ergeben.

Wir haben nun zur Prüfung dieser Formeln an einer größeren Zahl von Multipletts Messungen ausgeführt; da die Verhältnisse im Eisenspektrum durch die dort besonders zahlreich auftretenden Interkombinationen verwickelter sind, haben wir neben einigen Eisenmultipletts, zahlreiche Liniengruppen der Bogenspektren des Cr, Mn, Ti und V untersucht, um einen Überblick zu bekommen, in welchem Maße die Voraussetzungen der Theorie von der Wirklichkeit erfüllt sind.

Die photometrische Methode

Es ist ein wesentlicher Zug in den modernen Verfahren der photometrischen Spektralphotometrie, daß die genaue Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten der photographischen Platte, ihrer Gradation und deren Abhängigkeit von Intensität, Belichtungszeit, Entwicklung und anderen Faktoren immer mehr in den Hintergrund tritt und die photographische Platte nur

1) A. Sommerfeld und W. Heisenberg, *Ztschr. f. Phys.* 11. S. 131. 1922.

2) L. S. Ornstein und H. C. Burger, *Ztschr. f. Phys.* 11. S. 131. 1922; A. Sommerfeld und H. Hönl, *Berl. Ber.* 9. S. 141. 1925; R. de L. Kronig, *Ztschr. f. Phys.* 31. S. 385, 33. S. 261. 1925; H. N. Russell, *Proc. Nat. Acad. Amer.* 11. S. 325. 1925; H. Hönl, *Ann. d. Phys.* 79. S. 273. 1926.

3) R. Frerichs, *Ztschr. f. Phys.* 31. S. 303. 1925.

4) J. B. van Milaan, *Ztschr. f. Phys.* 34. S. 1121. 1925, 38. S. 427. 1926.

mehr als „Nullinstrument“ zur Feststellung gleicher Energien verwandt wird. So bildet auch bei dem hier angewandten Verfahren, das sich aus der von Dorgelo, a. a. O. ausgearbeiteten Methode entwickelt hat, die Grundlage der zuerst von Hartmann ausgesprochene selbstverständliche Satz: „Zwei Lichtquellen sind photographisch gleich hell, wenn sie auf ein und derselben Platte in gleichen Belichtungszeiten gleiche Schwärzung erzeugen“. ¹⁾ Die Aussage: „photographisch gleich hell“ schließt zugleich, infolge der Abhängigkeit der Plattenempfindlichkeit von der Wellenlänge der Forderung gleicher (oder annähernd gleicher ²⁾ Wellenlänge der zu messenden Spektrallinien mit ein.

Wir zerlegen nun hier in ähnlicher Weise wie Dorgelo, a. a. O. die zu messenden Spektrallinien in eine Anzahl von Intensitätsstufen; dann ergibt der mikrophotometrisch durchgeführte Vergleich der einzelnen Stufen ohne weiteres die relativen Intensitäten der betreffenden Spektrallinien.

In einer früheren Mitteilung ³⁾ ist auf die Nachteile der Dorgeloschen Anordnung hingewiesen worden, insbesondere ist die Herstellung und Eichung der von Dorgelo verwandten „grauen Abschwächer“ schwierig, sofern sie auch im ultravioletten Spektralbereich brauchbar sein sollen, und außerdem schließt die unmittelbare Abbildung der Abschwächer auf die Linien gerade das leistungsfähigste Spektroskop, das Konkavgitter, infolge des beträchtlichen Astigmatismus aus. Dort wurde nun zugleich gezeigt, wie dieser scheinbare Nachteil des Konkavgitters benutzt werden kann, um mit Hilfe geeigneter „Raster“ die Abschwächung auf bekannte Intensitätsstufen zu erreichen.

Die optische Anordnung

Die Anordnung sei hier kurz noch einmal wiedergegeben. Es bedeutet (Fig. 1) *G* das Gitter, *K* die Kassette und *Sp* den Spalt der Bonner Gitteraufstellung nach Abney. ⁴⁾ Einem Punkt in der Kassette entsprechen dann zwei Brennpunkten,

1) J. Hartmann, Ztschr. f. Instrkde. 19. S. 97. 1899.

2) Auf diese Einschränkung wird weiter unten bei der Vergleichslichtquelle näher eingegangen.

3) R. Frerichs, a. a. O.

4) H. Konen, Ztschr. f. wiss. Phot. 1. S. 525. 1903.

eine vertikale, der Spalt und eine horizontale, die Kassetten-tangente.¹⁾ In dem Schnittpunkt *M* der horizontalen Brennlinie mit der optischen Achse: Lichtquelle-Spalt-Gitter projizieren wir nun im Strahlengang der zu untersuchenden Lichtquelle das Bild eines Rasters, das in den einzelnen horizontalen Streifen Lichtmengen im Verhältnis $16:8:4:2:1:16$ hindurchläßt. Die Wirkung dieses Rasters, von dem Fig. 2, Taf. VIII eine Abbildung gibt, äußert sich dann in einer Unterteilung der Spektrallinien in die gewünschten Stufen (vgl. Taf. VIII). *Es ist ein wesentlicher Vorteil dieser Anordnung, daß die Abschwächung unabhängig von der Wellenlänge ist und sich unmittelbar ohne jede Eichung aus der Struktur des Rasters ergibt.*²⁾

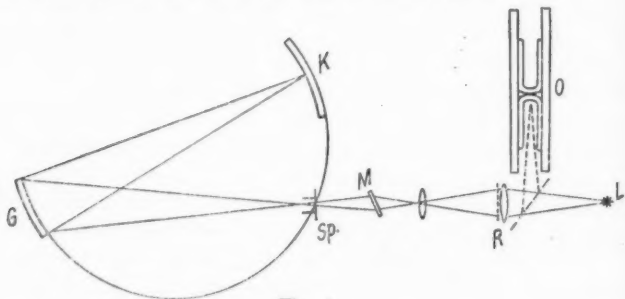


Fig. 1

Über die Einzelheiten ist folgendes zu sagen: Das benutzte Gitter (6,4 m, 89897 Striche) zeichnet sich in der hier ausschließlich verwandten 1. Ordnung durch ungewöhnliche Lichtstärke aus.³⁾ Das Raster ist von Zeiss-Jena auf photographischem Wege als dicke Silberschicht auf einer Quarzplatte nach einer schwarzweißen Schablone (25:1) niedergeschlagen worden. Bei der Anfertigung dieser Schablone wurde sorgfältig darauf geachtet, daß die Gesamtsummen der durchlässigen Teile eines horizontalen Streifens genau das angegebene Verhältnis aufweisen; Abweichungen in den einzelnen

1) I. L. Sirks, Astr. and Astrophys. 13. S. 763. 1896; F. L. Wadsworth, Astrophys. Journ. 3. S. 47. 1896.

2) Über eine andere, ebenfalls bei größter Dispersion brauchbare Anordnung, vgl. R. Frerichs, Ztschr. f. Phys. 35. S. 524. 1926.

3) Vgl. die weiter unten angegebenen Belichtungszeiten.

Feldern heben sich dann im Mittel heraus. Eine besondere Kontrolle ergaben außerdem Messungen an Linien bekannten Intensitätsverhältnisses (vgl. unten). Als Kondensor diente eine Quarzlinse, zur Projektion dagegen wurde ein Quarz-Fluorit-Achromat benutzt, um eine möglichst scharfe Unterteilung der Linien zu erhalten.

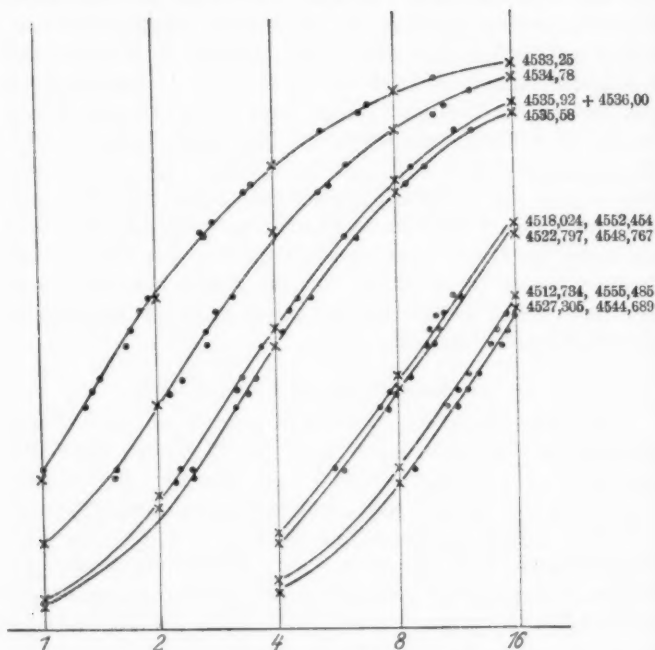
Es zeigt sich nun bei der Ausführung der Messungen, daß die ursprünglich bei *M* vorgesehene Mattscheibe überflüssig ist, sofern nur die Projektionslinse hinreichend groß und gleichmäßig vom Strahlengang erfüllt ist. Um Ungleichmäßigkeiten der Lichtquelle nach Möglichkeit zu kompensieren, wurde eine diffus zerstreuende Quarzmattscheibe in den Strahlengang zwischen Lichtquelle und Raster gebracht, außerdem diente eine vertikale Verschiebung der Kassette dazu, stets außer dem Vergleichsspektrum, unmittelbar hintereinander auf derselben Platte eine zweite Aufnahme mit um 180° gedrehten Raster zu machen, so daß durch Mittelung auch auf diese Weise Fehler infolge ungleichmäßiger Beleuchtung eliminiert werden konnten.

Die Auswertung der Aufnahmen

Die Auswertung der Aufnahmen geschah mit dem photoelektrischen Mikrophotometer nach Koch-Goos unter Benutzung des von van Cittert und Burger angegebenen graphischen Verfahrens der „Aufschiebung der Schwärzungskurven“.¹⁾ Dazu wurden in den Punkten 1, 2, 4, 8, 16 einer logarithmischen Teilung die zu den betreffenden Stufen gehörigen Mikrophotometerausschläge aufgetragen und die so erhaltenen Punkte (×) für eine jede Spektrallinie zur Schwärzungskurve verbunden (vgl. Fig. 3). Dann gibt der horizontale Abstand zweier, infolge der logarithmischen Teilung äquidistanter Kurven unmittelbar das Intensitätsverhältnis der betreffenden Linien. Die Kurven wurden dabei untereinander derart graphisch ausgeglichen, daß sie alle äquidistant verliefen und jede einzelne so durch eine größere Anzahl von Punkten (•) festgelegt war. *Es ist der Vorteil dieser Methode, daß es lediglich auf die eindeutige Zuordnung irgendwelcher Zahlen zu den*

1) H. C. Burger und P. H. van Cittert, Kon. Akad. van Wet Amsterdam 22. Nr. 5. 1920, ferner auch Dorgelo, a. a. O.

einzelnen Schwärzungen ankommt; das Mikrometer braucht daher nicht in absolutem Schwärzungsmaß geeicht zu sein. Aus diesem Grunde ist es auch möglich, als Nulllinie für die Messung der Photometerausschläge die Schwärzung des Plattenschleiers zu benutzen, sofern dieser, wie es bei den benutzten Platten stets der Fall war, sich gleichmäßig über die ganze Platte erstreckt.



Schwärzungskurve von Multiplatt 15 (Pl. 15c)

Fig. 3

Bei der großen Zahl der bearbeiteten Aufnahmen (ungefähr 100) war es infolge des großen Verbrauchs an Registrierplatten nicht möglich, das Photometer selbstregistrierend zu benutzen. Die Ausschläge des Photometers wurden daher auf einem im Kassettenrahmen des Photometers ausgespannten Papier mit einer feinen Nadel markiert. Die Vermeidung der Entwicklung und Trocknung der Registrierplatten bedeutete

eine große Zeitersparnis; außerdem konnte auf diese Weise die Realität irgendwelcher Unregelmäßigkeiten im Schwärzungsverlauf unmittelbar nachgeprüft werden. Es hat dabei wenig Sinn bei dem benutzten Photometer die Ausschläge genauer als etwa $\frac{1}{2}$ mm festlegen zu wollen, da die Werte bei mehreren aufeinanderfolgenden Registrierungen stets um derartige Beträge schwankten.¹⁾

Das Plattenmaterial

Bei der Auswahl der Plattensorten war der *Densograph* der Firma Ica-Dresden²⁾, der eine schnelle und bequeme Bestimmung der Gradationskurve ermöglicht, von großem Nutzen. Eine günstige, d. h. im geradlinigen Teil möglichst ausgedehnte Charakteristik wiesen folgende Platten auf: Für Aufnahmen im blauen und violetten Spektralbereich: Hauff-Ultrarapid, Schleußner-Ultrarapid und Westendorp u. Wehner-Rotetikett; im sichtbaren Teil: Schleußner-Viridin und mit Pinaflavol gebadete Westendorpplatten ($\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$). Außerdem wurden Ilford-Panchromaticplatten benutzt, die zwar sehr kontrastreich sind, jedoch den Vorzug großer Empfindlichkeit und Gleichmäßigkeit besitzen. Zur Entwicklung wurde ausschließlich der weich und schleierfrei arbeitende Glycinentwickler benutzt und im übrigen die Vorsichtsmaßregel bei der Behandlung der Platten beachtet, die zur Vermeidung von Ungleichmäßigkeiten im Schwärzungsverlauf dienen.³⁾

Die Vergleichslichtquelle

Bei der Messung des Intensitätsverhältnisses spektral weiter getrennter Linien muß sowohl die Änderung der Plattenempfindlichkeit wie auch der Einfluß der relativen Absorption innerhalb des Spektralapparates für verschiedene Wellenlängen berücksichtigt werden. Beide lassen sich dadurch bestimmen, daß eine energetisch geeichte Lichtquelle bekannter spektraler Energieverteilung ebenfalls mit der benutzten Anordnung photo-

1) F. Goos, Ztschr. f. Instrkde. 41. S. 320. 1921.

2) Der Helmholtzgesellschaft sei auch hier für die Beschaffung des Apparates gedankt.

3) Vgl. dazu die kürzlich erschienene Monographie: „Photographic Photometrie“, G. M. B. Dobson, I. O. Griffith and D. N. Harrison, Oxford, p. 74 ff. 1926.

graphisch photometriert wird.¹⁾ Der Vergleich der so bestimmten scheinbaren Energien $E_\lambda d\lambda$ mit den wirklichen Werten ergibt dann einen *Korrekturfaktor* für das photographisch bestimmte Intensitätsverhältnis bei verschiedenen Wellenlängen, *der sowohl die Plattenempfindlichkeit wie auch die relative Absorption innerhalb des Spektralapparates umfaßt*. Wird diese Bestimmung außerdem jedesmal zusammen mit den zu messenden Spektrallinien auf der gleichen Platte vorgenommen, so heben sich auch alle die Abweichungen heraus, die durch verschiedenartige Entwicklungsbedingungen hervorgerufen werden können.

Bei den vorliegenden Messungen haben wir als Vergleichslichtquelle unmittelbar den „schwarzen Körper“ benutzt. In einem Platinwiderstandsofen²⁾ wurden zwei Kohletiegel $16 \Phi \times 100 \text{ mm}$ mit den Böden aneinanderstoßend auf 1400° erhitzt (Fig. 1). Die Öffnung des einen diente als Strahler, an dem zweiten wurde gleichzeitig mit ein Pyrometer nach Holborn-Kurlbaum die Temperatur kontrolliert. Die drei benutzten Pyrometerlampen waren in der Reichsanstalt geeicht und ergaben untereinander Abweichungen, die 10° nicht überschritten. Ein derartiger zylindrischer Hohlraum mit *metallischen* Wänden ist nach Berechnungen von Zwikker und de Groot³⁾ bei einem Verhältnis: Länge: Durchmesser = 5:1 bis auf 5 Proz. schwarz, die Strahlung des hier benutzten *Kohlerohrs* kann daher bei den vorliegenden relativen Messungen unbedenklich als schwarz angesehen werden. Die Energieverteilung wurde nach der Wienschen Formel unter Benutzung des Wertes 1,435 für die Konstante c_2 berechnet. Bei einer Ofentemperatur von 1400° betrug die Expositionszeit im Gebiet 7000—4300 ÅE. bei der oben beschriebenen Anordnung etwa 15 Min. Die Spaltweite wurde dabei auf 1 mm entsprechend 2,62 ÅE. des normalen Spektrums eingestellt. Es gelang bei den verfügbaren Temperaturen jedoch nicht, brauchbare Schwärzungen unterhalb 4300 ÅE. zu erhalten, so daß wir

1) Eine Übersicht über die Lichtquellen bekannter spektraler Energieverteilung gibt Dorgelo in dem genannten Bericht.

2) Für die leihweise Überlassung des Ofens sei auch hier Prof. Pflüger gedankt.

3) H. B. Dorgelo, a. a. O. S. 768.

von einer Messung spektral sehr weit getrennter Linien in diesem Gebiet einstweilen absehen mußten.

Die folgende Tabelle gibt ein Beispiel für die Änderung der Empfindlichkeit einer orthochromatischen (Viridin) Platte im Bereich 5400—5250 ÅE.¹⁾

Tabelle 1

| Wellenlänge | 5400 | 5350 | 5300 | 5260 | 5250 |
|---|------|------|------|------|------|
| Intensität | | | | | |
| gemessen: a | 100 | 62 | 46 | 40 | 38 |
| b | 100 | 61 | 46 | 41 | 37 |
| berechnet: | 100 | 89 | 81 | 74 | 72 |
| Quot. $\frac{\text{ber.}}{\text{gem.}}$: a | 100 | 144 | 176 | 180 | 189 |
| b | 100 | 146 | 178 | 183 | 195 |

Die Empfindlichkeit einer Viridinplatte steigt also in dem angegebenen Intervall 5250—5400 ÅE auf ungefähr den doppelten Betrag; zwischen 4500 und 2500 ÅE. dagegen ändert sie sich bei den meisten Plattensorten nach Harrison²⁾ nur wenig. Wir haben nun außerdem, unter der Annahme, daß bei symmetrischen Multipletts (PP' , DD' , FF' ...) entsprechende Komponenten gleiche Intensität besitzen sollten, versucht an Hand der Messungen einen Überblick über den Gang der Empfindlichkeit in diesem Gebiet zu bekommen. Die Resultate waren jedoch nicht eindeutig³⁾, so daß in der Realität der auch sonst beobachteten Abweichungen von der Symmetrie s. u. festzuhalten ist.

Die Lichtquelle und die Messungen

In engem Zusammenhang mit der Messung der Intensitäten von Spektrallinien steht eine große Reihe von Fragen, die die

1) Diese Werte enthalten zugleich die relative Absorption in dem Spektralapparat.

2) G. R. Harrison, Journ. Opt. Soc. Amer. 11. S. 341. 1925. Dort wird gezeigt, daß die Empfindlichkeit („speed“) in dem Wellenlängenintervall 4500—2500 ÅE. für verschiedene Plattensorten konstant ist, lediglich die Neigung der Schwärzungskurven („contrast = γ “) fällt mit abnehmender Wellenlänge ab von 1,3 bzw. 2,9 bis 1,0 je nach den Entwicklungsbedingungen. Bei unvollständiger Entwicklung bleibt jedoch auch γ konstant.

3) Vgl. dazu die Messungen: Multipl. 1, 3, 6, 15, 21, 23.

eigentliche Struktur der Linien, ihre Breite, Intensitätsverteilung, Beeinflussung durch Druck u. a. betreffen.¹⁾ Wenn wir hier auf alle diese Erscheinungen nicht näher eingehen, so liegt es nur teilweise daran, daß sie bei den hier untersuchten linienreichen Spektren eingehend kaum erforscht sind, in erster Linie jedoch ist das Ziel der vorliegenden Untersuchung wesentlich enger gesteckt. Bei der Untersuchung der relativen Intensitäten innerhalb bestimmter Liniengruppen handelt es sich — in erster Annäherung — um Linien durchaus gleichartigen Ursprungs, die sämtlich in gleicher Weise äußeren Einflüssen unterworfen sind. Wir können daher im folgenden von der eigentlichen Form der einzelnen Linien gänzlich absehen und lediglich *die Intensität des Maximums als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des zugeordneten Quantensprungs* bestimmen. Damit ist zugleich der Vorteil verbunden, daß die Spaltweite des Spektrographen so breit genommen werden kann, wie es der geringste Komponentenabstand der betreffenden Liniengruppe zuläßt, so daß Fehler durch Ungleichmäßigkeiten im Plattenkorn herabgesetzt werden.

Eine beträchtliche Fehlerquelle bedeutet das unvermeidliche Auftreten von Absorption zugleich mit der Emission, die sich darin äußert, daß die stärkeren Linien stets relativ zu schwach erscheinen. Auf den Einfluß der Absorption bei der Messung der Intensitäten von Multipletts ist schon von verschiedener Seite hingewiesen worden²⁾ und man hat versucht, etwa durch weitgehende Herabsetzung der Stromstärke und Dampfdichte im Bogen die Selbstabsorption zu vermeiden.

Bei der Mehrzahl der vorliegenden Messungen haben wir nun als Lichtquelle den *Bogen bei vermindertem Druck* benutzt, der selbst bei größeren Stromstärken die Linien ausgezeichnet scharf und frei von Selbstumkehr wiedergibt. Die Konstruktion der Vakuumlampe ist eingehend beschrieben von Wolfsohn³⁾;

1) Für ältere Untersuchungen der zusammenfassende Bericht von J. Stark, *Jahrb. d. Rad. u. Elektr.* 12. S. 349. 1915, ferner die Arbeiten von Füchtbauer, Holtzmark, Ladenburg, Minkowski.

2) Vgl. die Messungen von H. B. Dorgelo a. a. O., R. Frerichs a. a. O. und v. Milaan; letzterer gibt Messungen bei verschiedenen Stromstärken in denen sich der Einfluß der Selbstabsorption besonders deutlich zeigt.

3) G. Wolfsohn, *Ann. d. Phys.* 80. S. 415. 1926.

dort wird auch zugleich an einzelnen charakteristischen Aufnahmen des Kupferspektrums gezeigt, wie weit die Umkehr- und Verbreiterungserscheinungen — etwa bei dem intensiven Kupferdublett: 3247—3274 ÅE. — im Vakuumbogen zurücktreten.

Der Bogen brannte ruhig und ohne Aufsicht bei einem Druck von 30 mm Hg und Stromstärken von 1—5 Amp. zwischen metallischen Elektroden; lediglich bei Vanadium wurde anstatt des teuren Metalls das Oxyd in ausgebohrten Kupferelektroden verwendet. Auf die verschiedenen Formen der Vakuumbogenentladung¹⁾ soll hier nicht näher eingegangen werden, es sei nur erwähnt, daß bei den angegebenen Bedingungen das Leuchten den Raum zwischen den Elektroden homogen und ohne Bildung eines Entladungskernes erfüllte.

Die Ergebnisse der auf diese Weise an 29 Liniengruppen durchgeführten Messungen sind in den Tab. 2—17 zusammengestellt. Die Tabellen sind nach der Multiplizität geordnet und enthalten: Erstens das Wellenlängenschema des Multipletts, zweitens die Einzelmessungen verschiedener Aufnahmen und drittens den Mittelwert aus diesen in gleicher Weise wie die zu erwartenden Intensitäten schematisch zusammengestellt. Diese letzteren sind in der Normierung von Russell, a. a. O. angegeben und die wenigen bereits vorliegenden anders normierten Messungen von v. Milaan sind zum Vergleich entsprechend umgerechnet.

A. Triplettsystem

Tabelle 2. Typ $^3F^3F'$

Multiplett 1 Ti: 3962—4024 ÅE²⁾ (Linien Klasse II)

Schema:

| | 2 | 3 | 4 |
|---------|---------|---------|---------|
| | | (5) | (20) |
| 4 | | 3964,27 | 3998,64 |
| | (8) | (20) | (10) |
| 3F 3 | 3962,86 | 3989,77 | 4024,57 |
| | (15) | (8) | |
| 2 | 3981,77 | 4008,93 | |

1) Vgl. A. Hagenbach, Phys. Ztschr. 10. S. 649. 1909; A. Hagenbach und H. Veillon, Phys. Ztschr. 11. S. 633. 1910.

2) C. C. Kieß und H. K. Kieß, Journ. Opt. Soc. Amer. Vol. 8. S. 607. 1924.

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Erwartung: 1215, 847, 640; 81', 80'; 81, 80.')

Messungen:

Pl. 1a 1215, 850, 648; 92, 90; 160, 120.

Pl. 1b 1215, 880, 660; 84, 82; 160, 130.

Erwartung:

| | 5 | : | 7 | : | 9 | |
|---|-----|------|------|---|------|------|
| 9 | | | 81' | | 1215 | 1296 |
| : | | | | | | |
| 7 | | | 80' | | 847 | 81 |
| : | | | | | | 1008 |
| 5 | | | 640 | | 80 | 720 |
| | 720 | 1008 | 1296 | | | |

Messung:

| | 4,8 | : | 7,0 | : | 9 | |
|-----|-----|------|------|---|------|------|
| 9 | | | 88 | | 1215 | 1303 |
| : | | | | | | |
| 7,7 | | | 86 | | 865 | 160 |
| : | | | | | | 1111 |
| 5,4 | | | 654 | | 125 | 779 |
| | 740 | 1078 | 1375 | | | |

Die Diagonale stimmt mit der Erwartung überein, die Satelliten weichen teilweise beträchtlich davon ab.

Multiplett 2 Ti: 4430—4482 ÅE (Kieß and Kieß a. a. O.)
(Linien Klasse II, III, III A)

Schema:

| | 2 | $^3F'$ | 4 |
|---------|---------|----------|----------|
| | | (3) | (4) |
| 4 | | 4430,37 | 4457,427 |
| | | (5) | (12) |
| 3F 3 | 4433,99 | 4455,319 | 4482,69 |
| | | (8) | (3) |
| 2 | 4453,31 | 4474,86 | |

Erwartung: 1215, 847, 640; 81', 80'; 81, 80.

Messungen:

Pl. 2a 1215, 890, 640; — — — —

Pl. 2b 1215, 855, 630; <100, <100; <100, <100.

Erwartung:

| | 5 | : | 7 | : | 9 | |
|---|-----|------|------|---|------|------|
| 9 | | | 81' | | 1215 | 1296 |
| : | | | | | | |
| 7 | | | 80' | | 847 | 81 |
| : | | | | | | 1008 |
| 5 | | | 640 | | 80 | 720 |
| | 720 | 1008 | 1296 | | | |

Messung:

| | | < 100 | 1215 | | < 1315 |
|--|-------|--------|--------|--|--------|
| | | | | | |
| | < 100 | 872 | < 100 | | < 1072 |
| | | | | | |
| | 635 | < 100 | | | < 735 |
| | < 735 | < 1072 | < 1315 | | |

Die Satelliten sind zur Messung zu schwach.

1) Bei symmetrischen Multipletts ist die eine Hälfte der einander entsprechenden Intensitäten durch Beifügung eines Strichs (') gekennzeichnet.

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Multiplett 3 Fe: 3969—4143 ÅE¹⁾ (Linien Klasse II)

| Schema: | $^3F^1$ | 2 | 3 | 4 |
|------------|---------|-----------------|-----------|-----------|
| | | (40) | (25) | |
| 2 | | 4071,748 | 4005,250 | |
| | | (25) | (45) | (30) |
| $^3F^1$ 3 | | 4132,064 | 4063,604 | 3969,263 |
| | | | (30) | (60 r) |
| 4 | | | 4143,874 | 4045,822 |
| Erwartung: | | 1215, 847, 640; | 81', 80'; | 81, 80. |
| Messungen: | | | | |
| Pl. 3 a | | 1215, 710, 560; | 235, 150; | 200, 130. |
| Pl. 3 b | | 1215, 720, 560; | 215, 150; | 200, 140. |
| Pl. 3 c | | 1215, 720, 560; | 220, 153; | 205, 133. |

Erwartung:

Messung:

| | 5 | 7 | 9 |
|---|-----|------|------|
| 5 | 640 | 80 | 720 |
| 7 | 80' | 847 | 81 |
| 9 | 80' | 1215 | 1296 |
| | 720 | 1008 | 1296 |

| | 4,5 | 6,8 | 9 |
|-----|-----|------|------|
| 4,4 | 560 | 134 | 694 |
| 6,7 | 151 | 717 | 202 |
| 9 | 223 | 1215 | 1438 |
| | 711 | 1074 | 1417 |

Die Intensitätsverteilung weicht hier in auffälliger Weise von der Erwartung ab. Die Linien sind teils schwächer, teils stärker, so daß die Summenregel gilt. Sehr gut zu messen sind die starken Intensitätsunterschiede bei den nahe benachbarten Satelliten. Man vgl. außerdem das Zunehmen der Abweichungen mit steigender Intervallgröße (Multiplett 2 → 1 → 3).

B) Quartettsystem

Tabelle 3. Typ $^4P^4D$

Multiplett 4 Mn: 4235—4312 ÅE²⁾ (Linien Klasse II)

| Schema: | $^7/2$ | $^5/2$ | $^3/2$ | $^1/2$ |
|-----------|---------|----------|----------|----------|
| | | | (6) | (6) |
| $^1/2$ | | | 4239,729 | 4257,659 |
| | | (6) | (6 r) | (4) |
| $^4P^3/2$ | | 4235,147 | 4265,920 | 4284,084 |
| | (6) | (6 r) | (3) | |
| $^5/2$ | 4235,30 | 4281,097 | 4312,550 | |

1) O. Laporte, Ztschr. f. Phys. 23. S. 135. 1924. 26. S. 1. 1924.

2) I. C. Mc Lennan and A. B. Mc Lay, Trans. Roy. Soc. Canada 3. Ser. Vol. 20. S. 23. 1926.

Tabelle 3 (Fortsetzung)

| | |
|------------|--------------------------------|
| Erwartung: | 120, 63, 25; 27, 32, 25; 3, 5. |
| Messungen: | |
| Pl. 4a | 183, 22; 40, 45, 33; 8, 10. |
| Pl. 4b | 183, 29; 40, 35, 24; — 6,5. |
| Pl. 4c | 183, 24; 45, 41, 28; 7,5 8,5. |
| Pl. 4d | 183, 25; 41, 36, 27; — 8,5. |

Erwartung:

| | 8 : 6 : 4 : 2 | |
|---|---------------|-----|
| 2 | 25 25 | 50 |
| : | | |
| 4 | 63 32 5 | 100 |
| : | | |
| 6 | 120 27 3 | 150 |
| | 120 90 60 30 | |

Messung:

| | 8 : 6,9 : 4,8 : 2,4 | |
|-----|---------------------|-------|
| 1,9 | 25 28 | 53 |
| : | | |
| 3,9 | 63 39 8,5 | 110,5 |
| : | | |
| 6 | 120 41,5 8 | 168,5 |
| | 120 104,5 72 36,5 | |

Linie 4235,300 und 4235,147 sind zusammen gemessen und die Intensität ist auf die beiden Linien verteilt. Die schwachen Satelliten 2. Ordnung sind nur ungenau gemessen.

Tabelle 4. Typ $^4D^4D'$

Multiplett 5 Mn: 4414–4502 ÅE (Mc Lennan, a. a. O.)
(Linien Klasse II)

Schema:

| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 4D | $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{2}$ |
|--------------------|---------------|---------------|----------|---------------|---------------|
| | | | (4) | (6) | |
| $\frac{1}{2}$ | | | 4453,013 | 4472,793 | |
| | | (6) | (6) | (5) | |
| $^4D' \frac{3}{2}$ | | 4436,358 | 4470,142 | 4490,078 | |
| | (6) | (6) | (6) | | |
| $\frac{5}{2}$ | 4414,887 | 4464,679 | 4498,897 | | |
| | (8) | (6) | | | |
| $\frac{7}{2}$ | 4451,578 | 4502,233 | | | |

Erwartung: 165, 83, 38, 24; 27', 34', 24'; 27, 34, 24.

Messungen:

| | |
|--------|--|
| Pl. 5a | 165, 67, 29, 21; 44, 42, 27; 39, 37, 25. |
| Pl. 5b | 165, 63, 27, 19; 44, 43, 22; 40, 39, 22. |
| Pl. 5c | 165, 72, 30, 22; 43, 41, 26; 42, 40, 26. |

Tabelle 4 (Fortsetzung)

Erwartung:

| | 8 : 6 : 4 : 2 | |
|---|---------------|-----|
| 2 | 24' 24 | 48 |
| : | | |
| 4 | 34' 38 24 | 96 |
| : | | |
| 6 | 27' 83 34 | 144 |
| : | | |
| 8 | 165 27 | 192 |
| | 192 144 96 48 | |

Messung:

| | 8 : 5,7 : 3,5 : 1,7 | |
|-----|---------------------|-------|
| 1,8 | 25 20,5 | 45,5 |
| : | | |
| 3,7 | 42 29 24 | 95 |
| : | | |
| 5,9 | 44 67 39 | 150 |
| : | | |
| 8 | 165 40,5 | 205,5 |
| | 209 149,5 93 44,5 | |

Hier treten Abweichungen der gleichen Art wie bei Multiplett 3 auf.

Tabelle 5. Typ $4F^4F'$

Multiplett 6 V: 4306—4384 Å.-E.¹⁾ (Linien Klasse I, II)

Schema:

| | $3/2$ | $5/2$ | $7/2$ | $9/2$ |
|-------|-----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| $3/2$ | (30) 4330,30 | (12) 4307,19 | | |
| $5/2$ | (10) 4355,96 | (30) 4332,83 | (15) 4306,22 | |
| $7/2$ | | (10) 4368,05 | (40) 4341,02 | (20) 4309,80 |
| $9/2$ | | | (125) 4384,73 | (50) 4352,89 |

Erwartung: 440, 293, 198, 154; 40', 51', 38'; 40, 51, 38.

Messungen:

Pl. 6a 440, 290, 205, 150; — 48, 35,5; 50,5, 61, 48.

Pl. 6b 440, 290, 190, 160; — 30, 24; 38, 50, 38.

Erwartung:

| | 4 : 6 : 8 : 10 | |
|----|-----------------|-----|
| 4 | 154 38 | 192 |
| : | | |
| 6 | 38' 198 51 | 288 |
| : | | |
| 8 | 51' 293 40 | 384 |
| : | | |
| 10 | 40' 440 | 480 |
| | 192 288 384 480 | |

Messung:

| | 3,8 : 5,8 : — : 10 | |
|-----|---------------------|-----|
| 4,3 | 155 45 | 200 |
| : | | |
| 6 | 30 197,5 55,5 | 283 |
| : | | |
| 8 | 39 290 44 | 373 |
| : | | |
| — | — 440 | 440 |
| | 185 281,5 345,5 484 | |

Die Abweichungen von der Erwartung sind relativ gering. Linie: 4384,73 ÅE. ist von einer starken Linie von Multiplett 22 überlagert. Hier tritt Unsymmetrie in den Satelliten auf!

1) W. F. Meggers, Journ. Wash. Acad. 13. S. 317. 1923.

C. Quintettsystem

Tabelle 6. Typ $^5S^5P$ Multiplett 7 Cr: 5204–5208 ÅE.¹⁾ (Linien Klasse II)

| Schema: | | 5P | | |
|-----------------------------------|--|------------------|----------|----------|
| | | 1 | 2 | 3 |
| 5S 2 | | 5204,692 | 5206,215 | 5208,598 |
| Erwartung: | | 3 : 5 : 7. | | |
| Messungen: | | | | |
| Pl. 7a | | 3,2 : 5,0 : 7,0. | | |
| Pl. 7b | | 3,1 : 4,5 : 7,0. | | |
| Pl. 7c | | 3,4 : 5,2 : 7,0. | | |
| Burger u. Dorgelo ²⁾ : | | 3,15 : 5,05 : 7. | | |

Die Messungen sind mit Vakuumbogen von 2 Amp. ausgeführt, die Messungen von Burger und Dorgelo sind mit Luftbogen gemacht.

Tabelle 7. Typ $^5P^5D$ Multiplett 8 Cr: 5247–5409 ÅE.¹⁾ (Linien Klasse I)

| Schema: | | 5D | | | | |
|------------|--|--|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| | | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 3 | | (12) 5409,99 | (10) 5348,52 | (7) 5300,932 | | |
| 5P 2 | | | (10) 5345,99 | (10) 5298,28 | (8) 5265,89 | |
| 1 | | | | (10) 5296,87 | (10) 5264,33 | (8) 5247,47 |
| Erwartung: | | 108, 56, 21; 28, 35, 27; 4, 9, 12. | | | | |
| Messungen: | | | | | | |
| Pl. 8a | | 108, 56, 22; 27, 40, 29; 4,9; 9,4, 13,5. | | | | |
| Pl. 8b | | 108, 62, 27; 30, 41, 35; 5,4, 11,5, 16. | | | | |
| Pl. 8c | | 108, 65, 28; 30,5 44, 35; 5,4, 11,5, 18. | | | | |

| Erwartung: | | Messung (Pl. 8a): | |
|------------|-------------------|-------------------|---------------------------|
| | 9 : 7 : 5 : 3 : 1 | | 9 : 6,9 : 5,6 : 3,2 : 1,1 |
| 7 | 108 28 4 | 140 | 7 108 27 4,9 |
| : | | | : |
| 5 | 56 35 9 | 100 | 5,3 56 40 9,4 |
| : | | | : |
| 3 | 21 27 12 | 60 | 3,2 22 29 13,5 |
| | 108 84 60 36 12 | | 108 83 66,9 38,4 13,5 |

Das Multiplett ist im Vakuumbogen zu schwach. Pl. 8a ist im Luftbogen bei 0,45 Amp. gemacht, Pl. 8b und 8c bei 1 Amp. Bei letzteren ist noch Selbstabsorption vorhanden.

1) H. Gieseler, Ann. d. Phys. 59. S. 147. 1922.

2) H. C. Burger u. H. B. Dorgelo, Ztschr. f. Phys. 23.S. 268. 1924.

Tabelle 8. Typ ${}^5D\ {}^5D$

Multiplett 9 Cr: 3883–3941 ÅE. (Gieseler, a. a. O.)

(Linien Klasse I, II)

Schema:

| | ${}^5D'$ | | | | |
|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | (9) 3919,914 | (5) 3941,639 | | | |
| 3 | (6) 3886,936 | (7) 3908,902 | (8) 3928,786 | | |
| 5D 2 | | (6) 3883,41 | (6) 3903,091 | (7) 3921,187 | |
| 1 | | | (6) 3885,361 | (5) 3903,306 | (6) 3916,384 |
| 0 | | | | (6) 3894,179 | |

Erwartung: 180, 84, 30, 6, 0; 36', 48', 42', 24'; 36, 48, 42, 24.

Messungen:

| | | | | | |
|----------|----------|----|----|-----------------|-----------------|
| Pl. 9a | 180, 81, | 39 | 0; | 43, 59, 36, 24; | 39, 65, 47, 24. |
| Pl. 9b | 180, 84, | 41 | 0; | 45, 56, 39, 25; | 43, 66, 50, 25. |
| Pl. 9c | 180, 82, | 36 | 0; | 40, 54, 40, 23; | 40, 53, 44, 23. |
| * Pl. 9d | 180, 84, | 36 | 0; | 44, 54, 42, 23; | 39, 51, 46, 23. |

Erwartung:

| | 9 : 7 : 5 : 3 : 1 | |
|---|-------------------|-----|
| 9 | 180 36' | 216 |
| : | | |
| 7 | 36 84 48' | 168 |
| : | | |
| 5 | 48 30 42' | 120 |
| : | | |
| 3 | 42 6 24' | 72 |
| : | | |
| 1 | 24 0 | 24 |
| | 216 168 120 72 24 | |

Messung Pl. 9c u. 9d:

| | 9 : 7,3 : 5,3 : 2,9 : 0,9 | |
|-----|---------------------------|-------|
| 9 | 180 42 | 222 |
| : | | |
| 7,2 | 39,5 83 54 | 176,5 |
| : | | |
| 5,0 | 52 30 41 | 123 |
| : | | |
| 3,0 | 45 6 23 | 74 |
| : | | |
| 0,9 | 23 0 | 23 |
| | 219,5 177 129 70 23 | |

Die Linien 3903,091 und 3903,306 ÅE. sind zusammen gemessen und die Intensität ist entsprechend verteilt. Messung 9a und 9b sind bereits veröffentlicht.¹⁾ Die Intensitäten stimmen hier gut mit der Erwartung überein.

1) R. Frerichs, Ztschr. f. Phys. 31. S. 305. 1926.

Tabelle 8 (Fortsetzung)

Multipllett 10 Fe: 5208—5393 ÅE. (Laporte, a. a. O.)
(Linien Klasse IV, V)

Schema:

| | | ⁵ D ³ | | | |
|-------------------------------|----------------|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | — | (1) 5273,18 | | | |
| 1 | (5) 5229,84 | (1) 5253,48 | (10) 5202,31 | | |
| ³ D ¹ 2 | | (1) 5215,19 | (8) 5263,32 | (12) 5339,95 | |
| 3 | | | (7) 5208,61 | (18) 5283,63 | (10) 5393,18 |
| 4 | | | | (15) 5217,41 | (30) 5324,20 |

Erwartung: 180, 84, 30, 6, 0; 36', 48', 42', 24'; 36, 48, 42, 24.

Messungen:

Pl. 10a 180, 79, 28, 5,4, 0; 40, 49, 37,5, 20; 20, 36, 23,5, 22,5.

Pl. 10b 180, 79, 31,5 < 9, 0; 43, 49,5, 41,5, 29; 21,5, 43, 26, 25.

Pl. 10c 180, 77, 27,5 7,2, 0; 39, 48, 41,5, 25; 23, 45,5, 29, 29.

v. Milaan, a. a. O.:

180, 77, 22, 6,5, 0; 48, 50, 39, 22; 22,5, 30, 28, 23.

Erwartung:

| | 1 : 3 : 5 : 7 : 9 | |
|---|-------------------|-----|
| 1 | 0 24' | 24 |
| : | | |
| 3 | 24 6 42' | 72 |
| : | | |
| 5 | 42 30 48' | 120 |
| : | | |
| 7 | 48 84 36' | 168 |
| : | | |
| 9 | 36 180 | 216 |
| | 24 72 120 168 216 | |

Messung:

| | 1,0 : 2,3 : 4,5 : 6,0 : 9 | |
|-----|---------------------------|-------|
| 1,0 | 25 | 25 |
| : | | |
| 2,9 | 25,5 6,5 40 | 72 |
| : | | |
| 4,2 | 26 29 49 | 104 |
| : | | |
| 6,6 | 41,5 78 41 | 160,5 |
| : | | |
| 9 | 21,5 180 | 201,5 |
| | 25,5 57,5 110,5 148,5 221 | |

Die Aufnahmen sind mit Luftbogen gemacht, da das Multipllett im Vakuumbogen zu schwach ist (Klasse IV—V). Die Linie 5208,61 ÅE. scheint durch die starke Chromlinie 5208,59 ÅE. überlagert zu sein, denn die Messungen von v. Milaan ergaben unter Verwendung chemisch reinen Eisens einen bedeutend kleineren Wert.

Tabelle 9. Typ ${}^5D\,{}^5F$

Multiplett 11 Fe: 5269—5501 ÅE. (Laporte, a. a. O.)

(Linien Klasse I)

Schema:

| | ${}^5F^1$ | | | | |
|-------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | (30) 5434,527 | | | | |
| 1 | (40) 5455,617 | (40) 5405,780 | | | |
| ${}^5D^1$ 2 | (15) 5497,521 | (40) 5446,922 | (50) 5371,496 | | |
| 3 | | (18) 5506,785 | (40) 5429,701 | (50) 5328,044 | |
| 4 | | | (12) 5501,471 | (40) 5397,135 | (60) 5269,538 |

Erwartung: 220, 150, 96, 56, 28; 30, 42, 40, 28; 2, 4, 4.

Messungen:

Pl. 11a 220, 140, 93, 54, 31; 50,5, 58, 52, 38; — — —

Pl. 11b 220, 150, 93, 56,5, 31; 49, 59, 53, 35; — — —

Pl. 11c 220, 150, 97, 52,5, 25,5; 40, 51, 53, 35; 3,8, 5,8, 4,6.

v. Milaan, a. a. O.:

220, 145, 92, 53, 27,5; 44, 59, 50,5, 35; 2,5, 5,5, 4,3.

Erwartung:

Messung:

| | 3 : 5 : 7 : 9 : 11 | | | 3,5 : 5,6 : 7,7 : 9,7 : 11 | |
|---|----------------------------|-----|------|----------------------------|-------|
| 1 | 28 | 28 | 0,95 | 29 | 29 |
| : | | | : | | |
| 3 | 28 56 | 84 | 3,0 | 36 54 | 90 |
| : | | | : | | |
| 5 | 4 40 96 | 140 | 5,0 | 4,6 52,5 94 | 151,1 |
| : | | | : | | |
| 7 | 4 42 150 | 196 | 6,9 | 5,8 56 147 | 208,8 |
| : | | | : | | |
| 9 | 2 30 220 | 252 | 9 | 3,8 46,5 220 | 270,3 |
| | 60 : 100 : 140 : 180 : 220 | | | 69,6 112,3 153,8 193,5 220 | |

Die Messungen von v. Milaan sind mit Luftbogen 0,35 Amp. gemacht.

Tabelle 9 (Fortsetzung)

Multiplett 12 Fe: 5572–5784 ÅE. (Laporte, a. a. O.)
(Linien Klasse IV)

| Schema: | | ⁵ D ² | | | | |
|-------------------------------|--|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | | (10) | (10) | (1) | | |
| 1 | | 5576,106 | 5602,965 | 5658,542 | | |
| | | | (20) | (10) | (1) | |
| 2 | | | 5569,631 | 5624,563 | 5712,150 | |
| | | | | (30) | (10) | (1) |
| ⁵ P ¹ 3 | | | | 5572,857 | 5658,836 | 5784,69 |
| | | | | | (40) | (10) |
| 4 | | | | | 5886,772 | 5709,395 |
| | | | | | | (50) |
| 5 | | | | | | 5655,663 |

Erwartung: 220, 150, 96, 56, 28; 30, 42, 40, 28; 2, 4, 4.

Messungen:

Pl. 12a 220, 156, 90, 52, 25,5; 26, 32, 31, 27; — — —
 Pl. 12b 220, 140, 88, 51,5, 25,5; 14,7, 31, 31,5, 25,5; — — —
 Pl. 12c 220, 136, 81,5, 46,5, 22,5; 15,8, 28,5, 27,5, 23,5; — — —
 Pl. 12d 220, 140, 92, 50,5, 27; 14,7, 32, 30, 26; — — —
 Pl. 12e 220, 142, 85, 41, 23,5; 14,3, 24,5, 24,5, 23,5; — — —
 Pl. 12f 220, 146, 93, 55, 27,5; — 35,5, 36, 27,5; — — —
 Pl. 12g 220, 146, 92, 56, 25; — — — — — — —
 v. Milaan: 220, 160, 102, 54, 28,5; 19, 31, 35, 28; — — —

Erwartung:

| | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | |
|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 3 | 28 | 28 | 4 | | | 60 |
| : | | | | | | |
| 5 | | 56 | 40 | 4 | | 100 |
| : | | | | | | |
| 7 | | | 90 | 42 | 2 | 140 |
| : | | | | | | |
| 9 | | | | 150 | 30 | 180 |
| : | | | | | | |
| 11 | | | | 220 | | 220 |
| | 28 | 84 | 140 | 196 | 252 | |

Messung:

| | | | | | |
|----|------|----|------|------|--|
| 25 | 26,5 | — | | | |
| | 50,5 | 30 | — | | |
| | | 89 | 30,5 | — | |
| | | | 144 | 15,0 | |
| | | | | 220 | |

Die Messungen dieses schwachen Multipletts sind infolge kontinuierlichen Untergrunds unsicher. Die Satelliten zweiter Ordnung sind nicht gemessen.

Tabelle 9 (Fortsetzung)

Multiplett 13 Cr: 4337—4412 ÅE. (Gieseler, a. a. O.) (Linie Klasse I)

Schema:

| | ⁵ D | | | | |
|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 5 | (10) 4351,946 | | | | |
| 4 | (8) 4385,146 | (10) 4344,672 | | | |
| ⁵ F 3 | (4) 4412,421 | (8) 4371,448 | (8) 4339,618 | | |
| 2 | | (5) 4391,923 | (8) 4359,795 | (5) 4337,718 | |
| 1 | | | (6) 4373,424 | (8) 4351,218 | (8) 4339,887 |

Erwartung: 220, 150, 96, 56, 28; 30, 42, 40, 28; 2, 4, 4.

Messungen:

Pl. 13a 220, 154, 110, 60, 38; 29, 43, 40, 27, — — —
 Pl. 13b 220, 158, 108, 56, —; 27, 43, 40, 25, — — —
 Pl. 13c 220, 158, 112, 65, —; 34, 45, 43, 27, — — —

Erwartung:

Messung:

| | 9 : 7 : 5 : 3 : 1 | | | | | | | | | | |
|----|-------------------|--|--|--|--|-----|----------|--|--|--|--|
| 11 | 220 | | | | | 220 | 220 | | | | |
| 9 | 30 150 | | | | | 180 | 30 156,5 | | | | |
| 7 | 2 42 96 | | | | | 140 | — 44 110 | | | | |
| 5 | 4 40 56 | | | | | 100 | — 51 61 | | | | |
| 3 | 4 28 28 | | | | | 60 | — 27 38 | | | | |
| | 252 196 140 84 28 | | | | | | | | | | |

Linie 4339,618 und 4339,887 ÅE. sind auf Pl. 13a zusammen gemessen und die Intensität ist entsprechend verteilt.

Multiplett 14 Ti: 4227—4305 ÅE. (Kieß and Kieß, a. a. O.)
 (Linien Klasse II, III)

Schema:

| | ⁵ F | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | | | (3) 4272,44 | (10) 4287,406 | (20) 4305,910 |
| 3 | | (5) 4274,585 | (10) 4286,006 | (15) 4301,08 | |
| ⁵ D 2 | (3) 4281,37 | (15) 4289,072 | (15) 4300,56 | | |
| 1 | (10) 4290,932 | (12) 4298,666 | | | |
| 0 | (10) 4295,751 | | | | |

Tabelle 9 (Fortsetzung)

Erwartung: 220, 150, 96, 56, 28; 30, 42, 40, 28; 2, 4, 4.

Messungen:

Pl. 14a 220, 130, 98, 58; 29, 29, 37, 39, 28; — — —

Pl. 14b 220, 135, 95, 58; 27, 29, 37, 39, 28; — — —

| Erwartung: | | | | | Messung: | | | | |
|------------|----|-----|-----|-----|----------|-----|--|------|----------|
| | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | | | | |
| 9 | | | 2 | 30 | 220 | 252 | | — | 29,5 220 |
| : | | | | | | | | | |
| 7 | | 4 | 42 | 150 | | 196 | | — | 37 132,5 |
| : | | | | | | | | | |
| 5 | 4 | 40 | 96 | | | 140 | | — | 39 96,5 |
| : | | | | | | | | | |
| 3 | 28 | 56 | | | | 84 | | 28,5 | 58 |
| : | | | | | | | | | |
| 1 | 28 | | | | | 28 | | 28 | |
| | 60 | 100 | 140 | 180 | 220 | | | | |

Tabelle 10. Typ $^5F^{\circ} \ ^5F''$ Multiplett 15 Ti: 4512—4555 ÅE. (Kieß und Kieß)
(Linien Klasse II)

Schema:

| | 1 | 2 | 5F 3 | 4 | 5 |
|-----------|----------|----------|------------|----------|----------|
| | (15) | (10) | | | |
| 1 | 4536,00 | 4544,689 | | | |
| | (15) | (15) | (8) | | |
| 2 | 4527,305 | 4535,92 | 4548,767 | | |
| | | (15) | (15) | (10) | |
| $^5F''$ 3 | | 4522,797 | 4535,58 | 4552,454 | |
| | | | (15) | (15) | (10) |
| 4 | | | 4518,024 | 4534,78 | 4555,485 |
| | | | | (15) | (20) |
| 5 | | | | 4512,734 | 4533,25 |

Erwartung: 475, 304, 189, 120, 96; 53', 75', 72', 48'; 53, 75, 72, 48.

Messungen:

Pl. 15a 310, 240, 174, 196; 53, 75, 70, 48; 53, 75, 70, 48.

Pl. 15b 330, 230, 170, 196; 54, 75, 70, 48; 54, 75, 70, 48.

Pl. 15c 475, 305, 196, 205; 56, 82, 80, 52; 56, 82, 80, 52.

Pl. 15d 475, 310, 186, 215; 50, 77, 73, 48; 53, 77, 74, 49.

Tabelle 10 (Fortsetzung)

| Erwartung: | | | | Messung (Pl. 15c u. 15d): | | | |
|------------|--------------------|-----|-----|---------------------------|----------------------------|------|-------|
| | 3 : 5 : 7 : 9 : 11 | | | | 3,0 : 5,1 : 7,2 : 9,2 : 11 | | |
| 3 | 96 | 48' | 144 | 3,0 | 92 | 50 | 142 |
| : | | | | : | | | |
| 5 | 48 | 120 | 240 | 5,1 | 50,5 | 118 | 245 |
| : | | | | : | | | |
| 7 | | 72 | 336 | 7,2 | | 77 | 347,5 |
| : | | | | : | | | |
| 9 | | | 432 | 9,1 | | 80 | 440,5 |
| : | | | | : | | | |
| 11 | | | 528 | 11 | | | 529,5 |
| | | 53 | | | | 54,5 | |
| | 144 | 240 | 336 | | 142,5 | 245 | 347,5 |
| | 432 | 528 | | | 441,5 | 528 | |

Bei Pl. 15a und 15b ist noch Selbstabsorption vorhanden. 15c und 15d stimmen mit der Erfahrung sehr gut überein. Linie 4536,00 und 4535,92 sind zusammen gemessen und die Intensität ist entsprechend verteilt.

D. Sextettsystem

Tabelle 11 Typ $^6P^6D$

Multiplett 16 Mn: 4455—4462 Å E.¹⁾ (Linien Klasse II, III)

Schema:

| | $^9/2$ | $^7/2$ | $^5/2$ | $^3/2$ | $^1/2$ |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | | (5) | (6) | (6) |
| $^3/2$ | | | 4455,820 | 4455,320 | 4455,019 |
| | | (6) | (6) | (5) | |
| $^6P^5/2$ | | 4458,263 | 4457,553 | 4457,041 | |
| | (8) | (6) | (8) | | |
| $^7/2$ | 4462,033 | 4461,089 | 4460,376 | | |

Erwartung: 420, 216, 78; 120, 158, 119; 20, 50, 84.

Messungen:

Pl. 16a 420, 225, 78; 117, 155, 117; 21, 54, 81.

Pl. 16b 420, 210, 67; 109, 158, 109; 18, 42, 78.

Erwartung:

Messung:

| 10 : 8 : 6 : 4 : 2 | | | | | 10 : 7,9 : 5,9 : 3,8 : 1,9 | | | | | | |
|--------------------|------------|-----|----|--|----------------------------|-----|----------------|-----|------|--|-------|
| 4 | 78 119 84 | | | | 280 | 3,8 | 72,5 113 79,5 | | | | 265 |
| : | | | | | | : | | | | | |
| 6 | 216 153 50 | | | | 420 | 6,1 | 217,5 156,5 48 | | | | 422 |
| : | | | | | | : | | | | | |
| 8 | 420 | 120 | 20 | | 560 | 8 | 420 | 113 | 19,5 | | 552,5 |
| 420 336 251 168 84 | | | | | 420 330,5 248,5 161 79,5 | | | | | | |

Die Übereinstimmung mit der Erwartung ist hier sehr gut.

1) M. A. Catalan, Trans. Roy. Soc. (A) 223. S. 127. 1922.

Tabelle 11 (Fortsetzung)

Multipllett 17 V: 4419—4460 ÅE.¹⁾ (Linien Klasse I)

Schema:

| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{9}{2}$ |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | (15) | (20) | (20) | | |
| $\frac{3}{2}$ | 4436,10 | 4444,26 | 4457,51 | | |
| | | (25) | (25) | (30) | |
| $^6P \frac{5}{2}$ | | 4428,55 | 4441,74 | 4459,82 | |
| | | | (15) | (20) | (50) |
| $\frac{7}{2}$ | | | 4419,99 | 4437,90 | 4460,35 |

Erwartung: 420, 216, 78; 120, 153, 119; 20, 50, 84.

Messungen:

| | | | | | | | | | |
|---------|------|------|-----|------|------|------|-----|-------|-------|
| Pl. 17a | 420, | 212, | 89; | 130, | 164, | 124; | 19, | 51, | 88. |
| Pl. 17b | 420, | 200, | 74; | 132, | 170, | 128; | 25, | 53,5, | 82,5. |
| Pl. 17c | 420, | 217, | 82; | 134, | 170, | 124; | 19, | 57, | 78. |
| Pl. 17d | 420, | 203, | 80; | 130, | 176, | 130; | 21, | 48, | 84. |
| Pl. 17e | 420, | 197, | 76; | 122, | 168, | 122; | 19, | 37,5, | 75. |

Erwartung:

| | 2 : 4 : 6 : 8 : 10 | |
|---|--------------------|-----|
| 4 | 84 119 78 | 280 |
| : | | |
| 6 | 50 153 216 | 420 |
| : | | |
| 8 | 20 120 420 | 560 |
| : | | |
| 8 | 84 168 252 336 420 | |

Messung:

| | 1,9 : 4,2 : 6,4 : 8 : 10 | |
|-----|--------------------------|-------|
| 4 | 81 125,5 80 | 286,5 |
| : | | |
| 5,9 | 49,5 169,5 206 | 419 |
| : | | |
| 8 | 20,5 129,5 420 | 570 |
| : | | |
| 8 | 81 175 270 335,5 420 | |

Die Übereinstimmung mit der Erwartung ist gut.

Multipllett 18 V: 3675—3705 ÅE. (Laporte, a. a. O.) (Linien Klasse I, II)

Schema:

| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{9}{2}$ |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | (40) | (40) | (30) | | |
| $\frac{3}{2}$ | 3690,277 | 3695,867 | 3705,037 | | |
| | | (30) | (50) | (60) | |
| $^6P \frac{5}{2}$ | | 3683,114 | 3692,224 | 3704,705 | |
| | | | (20) | (50) | (100) |
| $\frac{7}{2}$ | | | 3675,698 | 3688,07 | 3703,566 |

1) O. Laporte, Naturwiss. 11. S. 779. 1922; ferner Phys. Ztschr. 24. S. 510. 1923.

Tabelle 11 (Fortsetzung)

Erwartung: 420, 216, 78; 120, 153, 119; 20, 50, 84.

Messungen:

Pl. 18a 420, 225, 84; — — — — —
 Pl. 18b 420, 227, 80; — — — — —
 Pl. 18c 420, 227, 88; 130, 151, — — — 92.
 Pl. 18d 420, 222, 84; 126, 160, 126, — — 84.

Erwartung:

| | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | |
|---|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 4 | 84 | 119 | 78 | | | 280 |
| : | | | | | | |
| 6 | | 50 | 153 | 216 | | 420 |
| : | | | | | | |
| 8 | | | 20 | 120 | 420 | 560 |
| | 84 | 168 | 252 | 336 | 420 | |

Messung:

| | 88 | 126 | 84 | | |
|--|----|-----|-------|-----|-----|
| | | — | 155,5 | 225 | |
| | | | — | 128 | 420 |

Die schwachen Linien sind nicht gemessen.

Multiplett 19 Mn: 3577—3629 ÅE. (Catalan a. a. O.) (Linien Klasse II)

Schema:

| | $9/2$ | $7/2$ | $5/2$ | $3/2$ | $1/2$ |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | | (3) | (4) | (4) |
| $3/2$ | | | 3595,112 | 3610,290 | 3619,399 |
| | | (4) | (6) | (4) | |
| $6P' 5/2$ | | 3586,540 | 3608,484 | 3623,790 | |
| | (6) | (6) | (3) | | |
| $7/2$ | 3577,886 | 3607,530 | 3629,739 | | |

Erwartung: 420, 216, 78; 120, 153, 119; 20, 50, 84.

Messungen:

Pl. 19a 420, 233, 90; 194, 207, 155; 47, 90, 130.
 Pl. 19b 420, 257, 99; 215, 215, 188; 65, 108, 146.

Erwartung:

| | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | |
|---|-----|-----|-----|-----|----|-----|
| 4 | | | 78 | 119 | 84 | 280 |
| : | | | | | | |
| 6 | | | 216 | 153 | 50 | 420 |
| : | | | | | | |
| 8 | 420 | 120 | 20 | | | 560 |
| | 420 | 336 | 252 | 168 | 84 | |

Messung:

| | 10 | 10,7 | 8,6 | 6,3 | 3,3 | |
|-----|-----|-------|-------|-------|-----|-------|
| 4,7 | | | 94,5 | 167,5 | 138 | 400 |
| : | | | | | | |
| 6,5 | | | 245 | 211 | 99 | 555 |
| : | | | | | | |
| 8 | 420 | 204,5 | 56 | | | 680,5 |
| | 420 | 449,5 | 361,5 | 266,5 | 138 | |

Obwohl die Linien nicht sehr intensiv sind, scheinen die Messungen noch Selbstabsorption zu enthalten.

Tabelle 12. Typ ${}^6D\ {}^6D'$

Multiplett 20 V: 4092—4143 ÅE. (unvollständig bei Meggers, a. a. O.)
(Linien Klasse I)

Schema:

| | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{9}{2}$ |
|----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| | (15) | (15) | | | |
| $\frac{1}{2}$ | 4116,85 | 4109,78 | | | |
| | (5) | (15) | (10) | | |
| $\frac{3}{2}$ | 4123,71 | 4116,71 | 4105,17 | | |
| | | (10) | (15) | (20) | |
| ${}^6D\ \frac{5}{2}$ | | 4128,08 | 4116,48 | 4099,80 | |
| | | | (10) | (5) | (15) |
| $\frac{7}{2}$ | | | 4132,02 | 4115,18 | 4092,69 |
| | | | | (10) | (30) |
| $\frac{9}{2}$ | | | | 4134,50 | 4111,79 |

Erwartung: 196, 86, 24,7 1,07, 10,7; 44', 62', 58', 37'; 44, 62, 58, 37.

Messungen:

Pl. 20a 196, 87, 24; 44, 59, 56, 40; 45, 62, 59, 36.
Pl. 20b 196, 85, 37; 35, 59, 57, 45; 44, 63, 59, 36.
Pl. 20c 196, 87, 35; 41, 59, 55, 43; 43, 64, 59, 37.

Erwartung:

Messung:

| | 2 : 4 : 6 : 8 : 10 | | 2,0 : 4,3 : 6,1 : 8,1 : 10 | |
|----|--------------------|-----|----------------------------|-----|
| 2 | 10,7 37 | 48 | 2,1 10 41 | 51 |
| : | | | : | |
| 4 | 37 1,07 58 | 96 | 3,9 36,5 1 56,5 | 94 |
| : | | | : | |
| 6 | 58 24,7 62 | 145 | 6,0 59 24 60 | 143 |
| : | | | : | |
| 8 | 62 86 44 | 192 | 7,9 63 87 40 | 190 |
| : | | | : | |
| 10 | 44 196 | 240 | 10 44 196 | 240 |
| | 48 96 145 192 240 | | 46,5 101 143,5 191 236 | |

Die Linien 4116,85, 4116,71 und 4116,48 ÅE. sind zusammen gemessen und die Intensität ist entsprechend verteilt. Die Übereinstimmung mit der Erwartung ist sehr gut.

Tabelle 12 (Fortsetzung)

Multiplett 21 Mn: 4018–4083 ÅE. (Catalan, a. a. O.)

(Linien Klasse I)

Schema:

| | $^9/2$ | $^7/2$ | $^6D'$ $^5/2$ | $^3/2$ | $^1/2$ |
|--------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|
| $^1/2$ | | | | (2) 4058,936 | (2) 4070,280 |
| $^3/2$ | | | (4) 4048,760 | (2) 4068,029 | (6) 4079,428 |
| 6D $^5/2$ | | (5) 4035,730 | (4) 4063,533 | (6) 4082,947 | |
| $^7/2$ | (8) 4018,108 | (8) 4055,553 | (6) 4083,639 | | |
| $^9/2$ | (10) 4041,366 | (6) 4079,245 | | | |

Erwartung: 196, 86, 24,7, 1,07, 10,7; 44', 62', 58', 37'; 44, 62, 58, 37.

Messungen:

Pl. 21a 196, 86,5, 27, 1, 8,5; 45, 60,5, 57, 31; 30, 44, 41, 30.

Pl. 21b 196, 89, 26, 1, 8,3; 46, 62,5, 57, 34; 30, 48, 44, 30.

Pl. 21c 196, 89, 26, — — 47, 59, 59, 34; 28, 43, 41, 28.

Erwartung:

Messung:

| | 10 : 8 : 6 : 4 : 2 | | 10 : 7,4 : 5,4 : 3,2 : 1,6 | |
|----|--------------------|-----|----------------------------|-----------------------|
| 2 | 37' 10,7 | 48 | 1,8 | 33 8,4 41,4 |
| : | | | : | |
| 4 | 58' 1,07 37 | 96 | 3,9 | 57,5 1 29,5 88 |
| : | | | : | |
| 6 | 62' 24,7 58 | 145 | 5,8 | 60,5 26,5 42,5 129,5 |
| : | | | : | |
| 8 | 44' 86 62 | 192 | 8 | 46 88 45 179 |
| : | | | : | |
| 10 | 196 44 | 240 | 10 | 196 29,5 225,5 |
| | 240 192 145 96 48 | | | 242 178 129 76,5 38,9 |

Die Linien 4079,245 und 4079,428 ÅE. sind nicht getrennt. Ihre Summe ist entsprechend verteilt, aber wahrscheinlich zu gering gemessen. Im übrigen treten hier beträchtliche Abweichungen von der Symmetrie auf.

Tabelle 13. Typ ${}^6F^{\circ}D$

Multiplctt 22 V: 4379—4429 ÅE. (Laporte, a. a. O.)
(Linien Klasse I, II)

Schema:

| | $1/2$ | $3/2$ | $5/2$ | $7/2$ | $9/2$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|
| $1/2$ | (45) 4408,50 | (20) 4416,46 | | | |
| $3/2$ | (60) 4400,57 | (45) 4408,50 | (20) 4421,56 | | |
| $5/2$ | | (80) 4395,26 | (70) 4408,19 | (20) 4426,00 | |
| ${}^6F^{\circ}$ | | | (100) 4389,96 | (70) 4407,68 | (15) 4429,78 |
| $7/2$ | | | | (125) 4384,70 | (80) 4406,63 |
| $9/2$ | | | | | (150) 4379,21 |
| $11/2$ | | | | | |

Erwartung: 360, 242, 149, 79, 31; 58, 89, 95, 82, 53; 2,2, 5,1, 7,2, 6,7.

Messungen:

Pl. 22a 360, 234, 144, 83, 34; 50, 70, 72, 61, 43; 3,5, 9, 14, 14.
Pl. 22b 360, 252, 162, 75, 40; 54, 79, 86, 75, 43; — — — —
Pl. 22c 360, 255, 162, 86, 43; 54, 68, 76, 73, 39; — — — —
Pl. 22d — — — — — — — — — — 2,9, 5,9, 7,1, 6,6.
Pl. 22e — — — — — — — — — — 2,2, 5,5, 7,5, 7,5.

Erwartung:

Messung:

| 2 : 4 : 6 : 8 : 10 | | | | | 1,9 : 4,0 : 6,0 : 7,9 : 10 | | | | |
|--------------------|----|-----|-----|-----|----------------------------|-----|-----|-----|-------|
| 2 | 53 | 6,7 | | 60 | 1,9 | 42 | 14 | | 56 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 4 | 31 | 82 | 7,2 | 120 | 4,1 | 39 | 70 | 14 | 123 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 6 | | 79 | 95 | 5,1 | 5,5 | | 81 | 78 | 9 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 8 | | | 149 | 89 | 2,2 | 240 | 7,7 | | 156 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 10 | | | | 242 | 58 | 300 | 10 | | 247 |
| : | : | : | : | : | : | : | : | : | : |
| 12 | | | | | 360 | 360 | 12 | | |
| | | | | | | | | | |
| | 84 | 168 | 252 | 336 | 420 | | 81 | 165 | 248 |
| | | | | | | | | 328 | 416,5 |

Infolge der großen Intensitätsunterschiede (1:165!) sind die Werte der schwachen Linien auf Pl. 22a ungenau. Ihre relativen Intensitäten stimmen jedoch mit der Erwartung überein (Pl. 22d und 22e).

E. Septettssystem

Tabelle 14. Typ ${}^7D\,{}^7D'$

Multiplett 23 Fe: 4187—4299 ÅE. (Laporte, a. a. O.)
(Linien Klasse III)

Schema:

| | | | 7D | | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | (15) | (18) | | | |
| 1 | 4210,362 | 4233,614 | | | |
| | (15) | | (25) | | |
| 2 | 4191,446 | — | 4250,134 | | |
| 7D 3 | | (20) | (12) | (20) | |
| | | 4187,052 | 4222,225 | 4271,171 | |
| | | | (20) | (25) | (20) |
| 4 | | | 4187,812 | 4235,953 | 4299,254 |
| | | | | (20) | (35) |
| 5 | | | | 4198,314 | 4260,489 |

Erwartung: 1056, 441, 105, 0, 120; 264, 375, 360, 240; 264, 375, 360, 240.

Messungen:

Pl. 23a 1056, 450, 125, 0, 135; —, 390, 350, 250; 265, 370, 355, 230.

Pl. 23b 1056, 508, 98, 0, 129; 240, 320, 360, 246; 230, 365, 365, —

Erwartung:

Messung:

| | 3 : 5 : 7 : 9 : 11 | | | 3,1 : 5,2 : 7,1 : 8,9 : 11 | |
|----|-----------------------|------|-----|----------------------------|------|
| 3 | 120 240 | 360 | 3,2 | 132 248 | 380 |
| : | | | : | | |
| 5 | 240 0 360 | 600 | 5,0 | 230 0 355 | 585 |
| : | | | : | | |
| 7 | 360 105 375 | 840 | 6,9 | 365 112 345 | 822 |
| : | | | : | | |
| 9 | 375 441 264 | 1080 | 8,9 | 368 450 240 | 1058 |
| : | | | : | | |
| 11 | 264 1056 | 1320 | 11 | 248 1056 | 1304 |
| | 360 600 840 1080 1320 | | | 362 618 885 1043 1296 | |

Die Messungen stimmen gut mit der Erwartung überein. Hier liegt der theoretisch interessante Fall vor, daß innerhalb des Multiplett-schemas eine Nullstelle der Intensität auftritt bei: ${}^7D_2\,{}^7D_2'$. Man vgl. außerdem den Gang der Intensitäten in der Diagonalen.

Tabelle 15. Typ ${}^1F^1D$

Multiplett 24 Fe: 4859—5044 ÅE. (Laporte, a. a. O.)
(Linien Klasse II)

| Schema: | | 1D | | | | |
|-----------|--|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | (12) | | | | |
| 0 | | 4278,226 | | | | |
| | | (20) | (12) | | | |
| 1 | | 4872,154 | 4003,325 | | | |
| | | (15) | (25) | (10) | | |
| 2 | | 4859,757 | 4890,770 | 4938,828 | | |
| | | | (25) | (30) | (7) | |
| 1F 3 | | | 4871,333 | 4919,008 | 4885,562 | |
| | | | | (50) | (20) | (1) |
| 4 | | | | 4891,510 | 4957,311 | 5044,220 |
| | | | | | (60) | (20) |
| 5 | | | | | 4920,521 | 5006,134 |
| | | | | | | (60) |
| 6 | | | | | | 4957,612 |

Erwartung:

390, 262, 160, 84, 31; 68, 106, 116, 101, 65; 4, 10, 18, 25, 30.

Messung:

Pl. 24 300, 275, 160, 90, 29,5; 68, — 89, 75, 52; — 13, 18, 26, 29.

Erwartung:

| | 3 : 5 : 7 : 9 : 11 | |
|----|---------------------|-----|
| 1 | 80 | 30 |
| : | | |
| 3 | 65 25 | 90 |
| : | | |
| 5 | 31 101 18 | 150 |
| : | | |
| 7 | 84 116 10 | 210 |
| : | | |
| 9 | 160 106 4 | 270 |
| : | | |
| 11 | 262 68 | 330 |
| : | | |
| 13 | 390 | 390 |
| | 126 210 294 378 462 | |

Messung:

| | 2,7 : 4,7 : 6,5 : — : 11 | |
|------|--------------------------|-------|
| 1,0 | 29 | 29 |
| : | | |
| 2,6 | 52 26 | 78 |
| : | | |
| 4,4 | 29,5 75 18 | 132,5 |
| : | | |
| 6,4 | 90 89 13 | 192 |
| : | | |
| — | 160 — — | 160 |
| : | | |
| 11,2 | 275 68 | 343 |
| : | | |
| 13 | 390 | 390 |
| | 110,5 191 267 288 458 | |

Die vorliegende Messung ist nur vorläufig, Kontrollmessungen stehen noch aus.

Tabelle 16. Typ $^3F^3D$ (anomale Calciumgruppe)
Multiplett 25 Ca: 6439 – 6508 Å.E.)

Schema:

| | 3D | | |
|---------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 |
| $^3F''$ | | | (8) 6439,18 |
| | | (7) 6462,57 | (6) 6471,67 |
| | (6) 6439,79 | (5) 6499,67 | (1) 6508,88 |
| 3X | (6) 6449,81 | (3) 6455,57 | (1) 6464,71 |
| | | ($\frac{1}{2}$) 6447,63 | (1) 6456,90 |
| | | | ($\frac{1}{2}$) 6453,86 |

Erwartung: 405, 280, 189; 35, 35; 1, — —

Messungen:

Pl. 25a 405, 297, 180; 52, 41; — 74, 14.
Pl. 25b 405, 278, 182; 49, 46; — 85, 16.
Pl. 25c 405, 295, 190; 63, 53; — 87, 19.
Pl. 25d 405, 290, 190; 70, 55; — 87, 20.

Erwartung:

| | 3 | 5 | 7 |
|---|-----|-----|-----|
| 9 | | 405 | 405 |
| : | | | |
| 7 | 280 | 35 | 315 |
| : | | | |
| 5 | 189 | 35 | 1 |
| | 189 | 315 | 441 |

Messung:

| | 2,8 | 5,0 | 7 |
|-----|-------|------|-----|
| 9 | | 405 | 405 |
| : | | | |
| 7,8 | 290 | 59 | 349 |
| : | | | |
| 5,2 | 185,5 | 40 | — |
| | 185,5 | 339 | 464 |
| | 83 | 17,5 | — |
| | | — | — |
| | | — | — |

Diese Gruppe ist von Russell und Saunders angegeben und Back hat sie durch Zufügen der Gruppe $^3X^3D$ vervollständigt. Die Intensitäten der starken Gruppe stimmen einigermaßen mit der Erwartung überein; von der anderen Gruppe sind nur zwei Linien gemessen.

1) H. N. Russell und F. A. Saunders, *Astrophys. Journ.* 61. S. 938. 1923; E. Back, *Ztschr. f. Phys.* 33. S. 579, 1923.

Annalen der Physik. IV. Folge. 81.

Tabelle 17. (Interkombinationen)

Multiplett 26 Hg: 4339—4345 ÅE. (Paschen-Götze)

| Wellenlängen: | Intensitäten: |
|---------------------------|-------------------|
| $2^1P - 4^3D_2$: 4343,64 | 6 |
| $2^1P - 4^3D_3$: 4339,23 | 100 |
| $2^1P - 4^1D$: 4347,60 | 250 ¹⁾ |

Multiplett 27 Hg: 5889,69—5769,60 ÅE. (Paschen-Götze)

| Wellenlängen: | Intensitäten: |
|---------------------------|------------------|
| $2^1P - 3^3D_2$: 5789,69 | 3 |
| $2^1P - 3^3D_3$: 5769,60 | 100 |
| $2^1P - 3^1D$: 5790,60 | 80 ¹⁾ |

Diese Aufnahmen sind mit einer Quecksilberniederdruckdampf-
lampe gemacht.

Multiplett 28 Fe: 4229—4515 ÅE. (Laporte, a. a. O.)

(Linien Klasse IA, II, III, IIIA)

| Schema: | | | Messung: | | |
|-----------|----------|--------------|----------|-------------------|------------|
| | 2 | 3 $^3F^1$ | 4 | | |
| | (2) | (4) | | — | — |
| 2 | 4367,910 | 4291,472 | | 12,8 | 1,4 — 14,2 |
| | (20) | (10) | (1) | | : |
| 3 | 4415,127 | 4337,052 | 4229,752 | 48 | 5 53 |
| | | (25) | (15) | | : |
| $^4G^1$ 4 | | 4404,752 | 4294,132 | 100 | 100 |
| | | | (45) | 12,8 : 49,4 : 105 | |
| 5 | | | 4385,548 | | |
| 6 | | | — | | |

Messungen: Pl. 28 a 100, 45,5, 13,5; 5, 1,5, —; — —
 Pl. 28 b 100, 49, 13; 4, 1, —; — —
 Pl. 28 c 100, 50, 12; 6, 1,8, —; — —

Multiplett 29 Fe: 3786—3876 ÅE. (Laporte, a. a. O.)

(Linien Klasse II, III, IIIA)

| Schema: | | | Messung: (vorläufig) | | |
|---------|----------|--------------|----------------------|---------------|------------|
| | 2 | 3 $^3F^1$ | 4 | | |
| | (8) | | | 7 | 7 |
| 0 | 3786,678 | | | 6 | 20 26 |
| | (10) | (15) | | | : |
| 3P 1 | 3814,525 | 3790,094 | | 2 | 22 100 124 |
| | (—) | (15) | (25) | 15 : 42 : 100 | |
| 2 | 3876,044 | 3850,820 | 3812,966 | | |

1) T. Bouma, Ztschr. f. Phys. 33. S. 658. 1925, gibt für die Linien:
 4347,60 : 4339,23, bzw. 5790,60 : 5769,60 ein Verhältnis: 100 : 42, bzw. 1 : 1.

Wir haben von jedem Multiplett mehrere Aufnahmen gemacht und der Vergleich der Einzelmessungen zeigt, daß die zufälligen Abweichungen vom Mittelwert etwa 1 bis 3 Proz. betragen. Systematische Abweichungen können auftreten, teils infolge der unterhalb 4300 ungenau bekannten Variation der Plattenempfindlichkeit mit der Wellenlänge, teils infolge Selbstabsorption. Im letzteren Fall sind sie leicht an ihrem Gang erkenntlich, s. o.

Die Intensitätsformeln

Ein Multiplett beliebiger Stufe wird nach Heisenberg¹⁾ charakterisiert durch die Quantenzahl l und die Multiplizität r . Einem $S, P, D, F \dots$ Term entsprechen dann l -Werte $l = 0, 1, 2, 3 \dots$. Die Multiplizität r berechnet sich aus dem Impuls s des Atoms im s -Zustand ($l = 0$) zu: $r = 2s + 1$. Aus l und s setzt sich das gesamte Impulsmoment j des Atoms vektoriell zusammen und es gelten dann folgende Formeln für die Intensitäten, die bei gegebenen l und r den Übergängen $\Delta j = +1, 0, -1$ entsprechen²⁾:

$$a) \Delta l = \pm 1,$$

$$J_{-1} = \frac{r}{4l} \frac{P(j)P(j-1)}{j},$$

$$J_0 = \frac{r}{4l} \frac{2j+1}{j(j+1)} P(j)Q(j),$$

$$J_{+1} = \frac{r}{4l} \frac{Q(j)Q(j-1)}{j};$$

$$b) \Delta l = 0,³⁾$$

$$J_0 = \frac{r}{4} \frac{2l+1}{(l+1)} \frac{2j+1}{j(j+1)} R^2(j),$$

$$J_{\pm 1} = \frac{r}{4} \frac{2+1}{(l+1)} \frac{P(j)Q(j-1)}{j}.$$

Die Abkürzungen P, Q, R sind dabei gesetzt für:

$$P(j) = (-s + j + l)(s + l + j + 1),$$

$$Q(j) = (s - j + l)(s + 1 + j - l),$$

$$R(j) = j(j+1) + l(l+1) - s(s+1).$$

1) W. Heisenberg, Ztschr. f. Phys. 32, S. 841. 1925.

2) Die hier angewandte Schreibweise ist der Arbeit von Hönl, Ann. d. Phys. 79, S. 273. 1926, entnommen.

3) Die Fälle $\Delta l = +3, \Delta l = +2$ sind bisher nicht in Betracht gezogen, da zu wenig experimentelles Material vorliegt. Vgl. dazu: M. A. Catalan und K. Bechert, Ztschr. f. Phys. 32, S. 346. 1925.

Unter j ist dabei stets die größere der zu einem Übergang Δj gehörenden beiden Quantenzahlen zu verstehen.

Die speziellen Voraussetzungen, die diesen Formeln zugrunde liegen, sind folgende: Erstens muß „natürliche“ Anregung vorliegen, d. h. die Verteilung der Atome auf die verschiedenen Zustände (Terme) muß dem statistischen Gewicht dieser Zustände proportional sein. Bei der stufenweisen Anregung eines Multipletts, etwa durch Elektronenstoß variabler Geschwindigkeit, müssen die Intensitätsverhältnisse notwendig verzerrt erscheinen.¹⁾ Zweitens liegt es in der physikalischen Bedeutung der Summenregel, daß sie nur in dem Grade genau sein kann, wie $\Delta\nu$ gegen ν verschwindet. Es spielt da die wichtige, experimentell noch unentschiedene Frage hinein, ob die Summenregeln für die Intensitäten J oder die „Sprungzahlen“ J/ν gelten (vgl. u.). Ferner ist in der Ableitung die Bedingung enthalten, daß die Aufspaltungen $\Delta\nu$ der komplexen Multipletterme klein sind gegenüber den Niveaunterschieden zwischen Gliedern gleicher Hauptquantenzahl (Laufzahl), jedoch verschiedener Termsysteme (verschiedener l -Werte).²⁾ Schließlich ist zu erwarten, daß durch Interkombinationen zwischen verschiedenen Termsystemen, die außerhalb des Bereichs dieser Formeln fallen und die nach de Kronig als Störungseffekte zu deuten sind, ebenfalls die Intensitätsverhältnisse beeinflusst werden können.

Vergleich mit der Erfahrung und Diskussion der Ergebnisse

Eine summarische Prüfung der Intensitätsformeln gibt Russell.³⁾ Er konnte nämlich zeigen, daß die Quadratwurzeln aus den für 54(!) Kombinationen des Dublett- bis Oktettsystems berechneten Intensitäten angenähert proportional sind den Intensitätsschätzungen der Kingschen Offenmessungen und er

1) Man vgl. in diesem Zusammenhang die Untersuchungen von H. B. Dorgelo und W. de Groot, Ztschr. f. Phys. 36. S. 897. 1926, wo die Intensitätsverhältnisse im Neonspektrum bei wechselnden Anregungsbedingungen untersucht werden.

2) Diese Bedingung, die sich bei der formalen E -Deutung darin äußert, daß die zugehörigen Präzessionsfrequenzen ω_j gegenüber ω verschwinden, finden in gewissem Sinne ihr Analogon in der Paschen-Back-Umwandlung des anomalen Zeemaneffektes.

3) H. N. Russell, Proc. Nat. Acad. Amer. 11. S. 325. 1925.

wies an Hand einer eingehenden Durchmusterung des umfangreichen empirischen Materials die Gültigkeit der Formeln nach. Es ist selbstverständlich, daß eine derartige rohe Schätzung genaue Messungen nicht zu ersetzen vermag.

Eine exakte Bestätigung haben die Formeln bis jetzt gefunden — wenn wir von dem trivialen Fall der allein durch die Summenregel festgelegten Dubletts und Triplets absehen — in den Kombinationen: $^3P^3D$, $^3P^3P'$, $^3D^3D'$, $^3D^3F$ der Erdalkalien nach Messungen von Dorgelo, a. a. O., und einer vom Verf. a. a. O. gemessenen Gruppe $^5D^5D'$ des Chroms.¹⁾ Dagegen ergaben Messungen von v. Milaan an den Typen $^6F^6D$, $^5D^5D'$, $^6P^5D$ des Eisens zwar eine Bestätigung der Summenregeln, jedoch wichen die Einzelmessungen beträchtlich von der Erwartung ab. Wir haben drei dieser Multipletts ebenfalls unabhängig von v. Milaan gemessen und können seine Ergebnisse im wesentlichen bestätigen (vgl. Multiplett: 10, 11, 12). Es zeigt sich nun, daß beim Eisen verschiedene Multipletts gleichen Typus Unterschiede in den einzelnen Intensitäten aufweisen, obgleich die Summenregel, wie auch aus den Messungen von v. Milaan hervorgeht, erfüllt ist. In einzelnen Fällen ist außerdem bei Multipletts symmetrischen Typus die Symmetrie in den Intensitäten stark verzerrt (Multiplett 10), bei anderen bleibt sie erhalten und es bestehen lediglich Abweichungen gegenüber den Einzelwerten der Erwartung (Multiplett 3). Günstiger liegen die Verhältnisse bei den Kombinationen höherer Multiplizität, z. B. den Typen $^7F^7D$ und $^7D^7D'$ (Multiplett 24, 23). Besonders in dem letzteren interessanten Fall, wo die Theorie eine Nullstelle für die Intensität der Linie: $^7D_2^7D_2'$ ergibt, ist die Übereinstimmung ausgezeichnet.

Bei den anderen hier untersuchten Elementen der ersten großen Periode wird die Erwartung in der Mehrzahl der Messungen bestätigt. Größere Abweichungen treten auf im Quartettssystem bei den Kombinationen $^4D^4P$ und $^4D^4D'$ des Mangans (Multiplett 4, 5). Eine gute Übereinstimmung fanden wir bei den Typen: $^5D^5P$ (Multiplett 8), $^5D^5D'$ (Multiplett 9),

1) Diese Gruppe ist in der vorliegenden Untersuchung nochmals und genauer gemessen (Multiplett 9).

$^5D\ ^5F$ (Multiplett 13, 14), $^5F\ ^5F'$ (Multiplett 15), $^6D\ ^6P$ (Multiplett 16, 17, 18), $^6D\ ^6D'$ (Multiplett 20, 21) und $^6D\ ^6F$ (Multiplett 22). Teilweise sind dabei in den Messungen die feinsten Einzelheiten der Erwartung zu erkennen (vgl. Multiplett 8, 15 und 16).

Eine Erklärung für die Abweichungen beim Eisenspektrum ist an Hand der verfügbaren Messungen nicht möglich, zumal wir über die inneren Zusammenhänge zwischen den einzelnen Termsystemen und vor allem über die Laufzahlen noch nichts wissen. Im übrigen müssen wir annehmen, daß neben den großen Aufspaltungen der Terme die zahlreichen und intensiven Interkombinationen beim Eisen die zu erwartenden Intensitäten störend beeinflussen. Dafür spricht, daß nach Laporte, a. a. O., Interkombinationen zwischen Triplett- und Quintettermen besonders häufig sind und wir auch gerade dort den stärksten Abweichungen von der Erwartung begegnen. Das Septettsystem neigt viel weniger zu Interkombinationen und dementsprechend finden wir hier bessere Übereinstimmung. Außerdem sind die Intervalle im Septettsystem teilweise bedeutend kleiner als bei den übrigen.

Bei den vorliegenden Messungen sind die Intensitäten J nicht auf Sprungzahlen J/ν umgerechnet, da die Meßgenauigkeit gegenüber den verhältnismäßig kleinen Aufspaltungen nicht hinreichend ist. So würde die Reduzierung auf gleiches ν hier im günstigsten Fall etwa 3 Proz. der Einzelintensitäten als Korrektur erfordern, ein Betrag, der innerhalb der Meßfehler fällt. Diese Frage läßt sich erst durch Messungen an Intensitäten großer Wellenlängenunterschiede entscheiden.¹⁾

Es liegt ferner nahe, die Abweichungen von den Intensitätsregeln mit der vielfach nur ungenau erfüllten Intervallregel in Zusammenhang zu bringen.²⁾ Intensitäten und Intervalle erweisen sich jedoch als voneinander unabhängig. Dies tritt z. B. deutlich hervor bei Multiplett 3 (Intervallregel gut, Intensitätsregel schlecht erfüllt) und bei Multiplett 9 (Intervallregel schlecht, Intensitätsregel gut erfüllt).

1) Nach freundlicher brieflicher Mitteilung von Hrn. Prof. Ornstein sind entsprechende Untersuchungen im Utrechter Institut im Gange.

2) Hr. Hönl hat vor einiger Zeit diese Vermutung in einem Schreiben an den Verf. geäußert.

Die Tab. 16 und 17 enthalten Messungen einer anomalen Calciumgruppe und einiger Interkombinationen. Erstere Gruppe bietet besonderes Interesse, weil sie nach Back, a. a. O., aus zwei miteinander gekoppelten gleichartigen Gruppen zusammengesetzt ist und im Zeemaneffekt neuartige Aufspaltungsbilder liefert. Die Messungen zeigen, daß für die eine Hälfte der Gruppe die Intensitätsregel einigermaßen erfüllt ist. Die Abweichungen in den Satelliten erster Ordnung dürften durch Selbstabsorption der auch im Vakuumbogen intensiven Linien verursacht sein. Gänzlich anomales Verhalten zeigen jedoch die Intensitäten der anderen Hälfte, von der nur zwei Linien meßbare Werte aufweisen.

Tab. 17 schließlich enthält Messungen der Quecksilberlinien: $2^1P - n^3D_1$ und zweier Interkombinationen des Eisens. Das Quecksilberspektrum ist an sich nicht besonders geeignet zur Untersuchung der Zusammenhänge zwischen den einzelnen Termsystemen, da die Gültigkeit der Intensitätsformeln hier noch nicht nachgewiesen ist, allein die anderen bekannten Interkombinationslinien, z. B. der Erdalkalien, die besonders in Betracht kommen, sind zur Intensitätsmessung ungeeignet, da sie schwach sind und vielfach in ungünstigen Spektralbereichen liegen. Aus den Messungen geht hervor, daß sich die Quantengewichte: 7 und 5 der beiden Zustände: n^3D_3 und n^3D_2 in keiner Weise in den Intensitäten der beiden Linien $2^1P - n^3D_3$ bzw. $2^1P - n^3D_2$ widerspiegeln. Dieselben starken Kontraste in den Intensitäten treten in den beiden Interkombinationen: $5G^1 3F^1$ und $3P^1 5F^1$ des Eisens auf. Näherer Aufschluß über die Intensitäten der Interkombinationen ist jedoch erst von den Messungen zu erwarten, die an den Metallen Cr, Mn, Ti, V, bei denen die Gültigkeit der Intensitätsformeln nachgewiesen ist, im Anschluß an diese Untersuchung fortgesetzt werden.

Zusammenfassung

Es wird eine Anordnung zur exakten photographischen Spektralphotometrie bei großer Dispersion eingehend beschrieben, die auf der Verwendung geeigneter „Raster“ in Verbindung mit den astigmatischen Eigenschaften des Konkavgitters beruht.

Ein „schwarzer Körper“ ($T = 1400^\circ \text{C.}$) als Vergleichslichtquelle ermöglicht die Bestimmung der relativen Plattenempfindlichkeit und damit die Messung weiter getrennter Linien im Wellenlängenbereich: 7000—4300 ÅE.; unterhalb dieser Grenze beschränkt sich die Methode auf spektral hinlänglich benachbarte Linien.

Zur Prüfung der von Ornstein-Burger, Sommerfeld-Hönl, Russell und de Kronig angegebenen Formeln für die Intensitäten der Multiplettlinien werden Messungen an einer größeren Zahl von Liniengruppen des Fe, Cr, Mn, Ti, V ausgeführt.

Die Messungen der Eisenmultipletts ergeben jedoch zum Teil beträchtliche Abweichungen von der Erwartung, die durch die großen Aufspaltungen der Multipletterme zusammen mit den zahlreichen Interkombinationen bedingt sein dürften.

Bei den Elementen Mn, Cr, Ti und V werden die Intensitätsregeln fast durchweg bestätigt.

Es werden einige vorläufige Messungen an Interkombinationslinien des Quecksilbers und des Eisens mitgeteilt, die jedoch keinerlei Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen.

Erläuterungen zu Tafel VIII

Die Tafel VIII enthält einige Multiplettypen mit charakteristischer Intensitätsverteilung. Die Terme der Linien sind dabei in der von Meggers (Proc. Nat. Acad. Amer. 11. S. 43. 1925) angegebenen übersichtlichen Weise durch horizontale bzw. schräge Striche gekennzeichnet, deren Schnittpunkt die zugehörige Kombinationslinie angibt.

1. Multiplett 21 Mn: 4018—4083 ÅE.

2. Multiplett 16 Mn: 4455—4462 ÅE.

Die engen *D*-Aufspaltungen sind nicht eingetragen.

3. Multiplett 15 Ti: 4512—4555 ÅE.

Man beachte die Symmetrie in den Satelliten.

4. Multiplett 22 V: 4379—4429 ÅE.

Man beachte die starken Intensitätsunterschiede zwischen Hauptlinien und Satelliten.

5. Multiplett 8 Cr: 5247—5409 ÅE.

Der obere Teil der Aufnahme enthält das kontinuierliche Vergleichsspektrum.

Die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft hat die Ausführung der vorliegenden Untersuchung ermöglicht. Ihr sei auch an dieser Stelle dafür gedankt. Mein besonderer Dank gilt auch dem Direktor des Physikalischen Instituts Prof. Konen, der mir alle erforderlichen Mittel bereitwillig zur Verfügung stellte.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität, Sept. 1926.

(Eingegangen 19. September 1926)

4. Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum; von Aurel Wintner

(Zweite Mitteilung)¹⁾

Die kleinen freien Schwingungen eines unendlichen Kristallgitters werden durch ein unendliches Differentialsystem vom Typus

$$(1) \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_k [f]_{|i-k|} x_k \quad \left(\sum_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \right)$$

definiert, wobei die $[f]_m$ reelle Konstanten bedeuten; $[f]_0 = 0$, da die Partikel auf sich selbst nicht wirken. In I habe ich gezeigt, daß (1) gewisse Normalschwingungen besitzt, wenn die Matrix $\|[f]_{|i-k|}\|$ im Hilbertschen Sinne beschränkt ist, d. h. wenn $2 \sum_{m=1}^{\infty} [f]_m \cos 2\pi m v$ die Fourierreihe einer in die Klasse B der beschränkten²⁾ Funktionen gehörenden Funktion $f(v)$ ist; auch habe ich erwähnt, daß diese Bedingung schon bei ein-

1) Die erste, die in den Ann. d. Phys. 81. S. 577. 1926 erschienen ist, soll der Kürze halber mit I zitiert werden. Es sei hier erwähnt, daß in I $\log r$ die Elementarkraft und $\int \log r dr$ das Elementarpotential ist; unnötig zu bemerken, daß in dem dortigen eindimensionalen Falle nur dieser Ansatz berechtigt ist, da der Ebene $1/r$ und dem Raume $1/r^3$ als Elementarkraft nur so zukommen kann. Ich habe aber inzwischen eingesehen, daß jenes Beispiel nichtssagend ist, da ich die Matrix als symmetrisch annehme, als ob es sich nicht um ein verzerrtes Gitter, sondern um ein nichtverzerrtes lineares System handeln würde, und da andererseits die schiefsymmetrische (alternierende) Matrix $\left\| \frac{1}{s-k} \right\|$ (bedingt, d. h. nicht absolut) beschränkt ist. Übrigens fällt die mathematische Behandlung des verzerrten Falles nicht schwieriger aus, wie es aus den Ausführungen von D. Hilbert, Gött. Nachr. 1906. S. 216—218 hervorgeht; vgl. O. Toeplitz, Math. Ann. 70. S. 351 bis 376. 1911.

2) Von einer additiven Nullfunktion soll immer abgesehen werden.

fachen Beispielen nicht erfüllt ist.¹⁾ Ich will hier solche Eigenschwingungen behandeln, die zum Typus dieser nicht-beschränkten Matrizen gehören. Die Untersuchung subsumiert sich dem am Ende von I formulierten Prinzip, es ist aber hier noch möglich, die Existenz der Lösung direkt zu beweisen, so daß wir uns der Approximation nur zur expliziten Bestimmung der Normalschwingungen bedienen werden.

Ich erhalte nicht „singuläre“ Grundlösungen, d. h. die von Born²⁾ betrachteten *freien* ebenen Wellen, sondern eine „allgemeine“ Lösung mit den unendlich vielen willkürlichen Anfangswerten, deren Gesamtheit aus Konvergenzgründen gewissen Ungleichungen zu genügen hat, welche bewirken, daß die Lösung eine Eigenschwingung ist im Sinne des Zusatzes von I, und davon ist bei den Wellenlösungen und bei einer räumlichen Periodizität keine Rede. Mit Rücksicht auf die Formel (4), (5) von I kann man diese Wellenlösungen als Differentiallösungen des obigen Differentialsystems (1) be-

1) Um Irrungen vorzubeugen, sei ausdrücklich betont, daß dieser Sachverhalt mit dem bekanntlich höchstens bedingten (nämlich auf der Neutralität beruhenden) Konvergenzcharakter der gittertheoretischen Probleme eigentlich nichts zu tun hat. Denn es ist zwar wahr, daß die Matrix derart gewählt werden kann, daß sie beschränkt, jedoch nicht

absolut beschränkt ist, d. h. daß es vorkommen kann, daß $\sum_{m=1}^{\infty} |f|_m$

$\cos 2\pi m v$ zu B gehört und $\sum_{m=1}^{\infty} |f|_m \cos 2\pi m v$ nicht (vgl. O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1910, S. 488–506), und man kann sogar auf Grund der Beschränktheit der überall endlichen Bilinearformen (vgl. E. Hellinger und O. Toeplitz, Math. Ann. 69. S. 163–69. 1910) mit leichten Beispielen gezeigt werden, daß z. B. der von mir bewiesene allgemeine Existenzsatz (Ztschr. f. Phys. 37. S. 225–29. 1926) *tatsächlich* außerhalb der Tragweite des Majorantenprinzips gelegen ist, in dem Sinne, daß die Bedingungsungleichungen bei dem besten Majorantensystem von (1) für die Entwicklungskoeffizienten der $x_i(f)$ von einer gewissen Stelle ab den Wert $+\infty$ liefern (die Sache erklärt sich, wenn man die beste Majorante der Lösung eines Systems mit der Lösung des zugehörigen besten Majorantensystems nicht verwechselt). Man beachte aber erstens, daß das Majorantenprinzip auch in I nicht herangezogen ist, zweitens, daß durch die Heranziehung davon das Verhalten der Singularität überhaupt nicht verschlechtert wird, vgl. M. Born, Enc. d. Math. Wiss. Bd. V, 3. S. 721, Formel (407).

2) M. Born, a. a. O., S. 575 u. 723, Fußnote 257.

zeichnen und dem entsprechend sagen, daß die Bornsche Behandlung vermittelt den Wellenlösungen und die Ersetzung des unendlichen Gitters durch das zyklische in einem gewissen Sinne auf der Toeplitz-Hellingerschen Beherrschung der Laurentschen Spektralmatrizen beruht. Die Existenz von Differentiallösungen eines solchen Differentialsystems liegt formell nach der Theorie der quadratischen Formen auf der Hand und zwar sind die Wellenlösungen von (1) nach Born durch die beiden Parameter Wellenlänge und Wellennormale bis auf endlich viele Integrationskonstanten festgelegt. Will man von den Wellenlösungen zu der allgemeinen Lösung aufsteigen, so sind gemäß dem Superpositionsprinzip in bezug auf die Parameter Integrationen auszuführen und schon wegen des Auftretens von Singularitäten bei diesen Parametern und wegen den differentiellen Orthogonalitätsrelationen bedarf es einer näheren Untersuchung, welche und ob sämtliche Eigenschwingungen auf diesem Wege erhalten werden können; darauf bezieht sich meine Bemerkung in I S. 584 („und fragt nicht danach . . .“). Auf Grund der Behandlung vermittelt den Eigenschwingungen ergibt sich eine befriedigende Antwort. — Umgekehrt, durch weitere Verfolgung der Vergleichung der beiden Methoden müßte sich die mathematische Behandlung der Wellenlänge auf Grund der Spektralmatrix ergeben. Es wäre dann vielleicht möglich, eine sinngemäße statistische Übersetzung der Anfangswerte vorzunehmen.

Die Verallgemeinerung gegenüber I, die wir zu behandeln haben, besteht darin, daß wir nicht voraussetzen, daß $f(v)$ zu B gehört. Ist $f(v)$ derart, daß die Laplacesche Bedingung

$$(2) \quad \int_0^1 |f(v)|^n dv \leq n! \Omega^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

erfüllt ist, wobei Ω eine von n unabhängige, sonst beliebige Schranke bedeutet, so sagen wir, daß $f(v)$ zur Klasse L_Ω gehört und wir sagen, daß $f(v)$ zur Klasse L gehört, wenn es zu irgendeinem gehörig gewählten L_Ω gehört. In L sind gewisse milde Unendlichkeitsstellen zugelassen. Bedeutet Q die Klasse der quadratisch integrierbaren Funktionen, so können wir zusammenfassend sagen, daß L eine echte Oberklasse von B , und Q eine echte Oberklasse von L ist. Denn die Funktionen

von L sind nach Definition nicht nur quadratisch, sondern auch unbegrenzt, d. h. auf beliebig hohen Potenzen integrierbar, was für die unten folgenden sehr wichtig ist; es besagt nämlich, daß jede Potenz der zu L gehörigen Funktion quadratisch integrierbar ist, so daß die Quadratsumme der Fourierkoeffizienten der Potenz konvergiert; die Umkehrung davon gilt nicht, wir werden vielmehr bei den schrittweisen Annäherung a priori nur behaupten können, daß $\varphi_n(v)$ (siehe unten) nach dem Riesz-Fischerschen Satz in Q eindeutig festgelegt ist, und die bei dem nächsten Schritte der vollständigen Induktion notwendige Integrabilitätseigenschaft ergibt sich nur aus den expliziten Formen. — Zu L gehören wegen

$$\int_0^1 (-\log v)^n dv = \Gamma(n+1)$$

z. B. die stückweise regulären Funktionen mit endlich vielen logarithmischen¹⁾ Singularitäten und nach I S. 584 ist eben dies, was wir brauchen. Wir verstehen von jetzt an unter Funktionen von v nur solche, die nach 1 periodisch sind und zu L gehören, was nicht wiederholt werden soll. Es überträgt sich alles ohne Schwierigkeit auf die Ebene und auf den Raum, wenn das Anwachsen der Anzahl der Dimensionen den Schritt hält mit dem der von ihr abhängigen „schlimmsten“ noch erlaubten Singularität.

Man setze zur Abkürzung allgemein

$$M(f) = \int_0^1 f(v) dv; \quad e_m(v) = e^{2\pi m v \sqrt{-1}}, \quad m = 0, \pm 1, \dots;$$

$$[f]_m = M(f e_{-m}).$$

$[f]_m = [f]_{|m|}$ (für jedes m) besagt, daß die Funktion $f(v)$ gerade ist (sie braucht nicht reellwertig zu sein). Aus der Vollständigkeitsrelation

$$M(f_1 f_2) = \sum_k [f_1]_{-k} [f_2]_k \text{ folgt wegen } [f_1 e_{-i}]_{-k} = [f_1]_{i-k}$$

ihre Verallgemeinerung

$$M(f_1 f_2 e_{-i}) = \sum_k [f_1]_{i-k} [f_2]_k.$$

1) Gemeint ist natürlich nicht $\frac{1}{\log(1-s)}$, sondern $\log s$ bei $s \rightarrow +0$.

Es seien $\varphi_0(v)$ und $\varphi_1(v)$ willkürlich gegebene Funktionen; wir wollen zunächst die Funktionen

$$\varphi_n(v), \quad n > 1$$

derart bestimmen, daß die Potenzreihen

$$(3) \quad x_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\varphi_n]_i}{n!} t^n \quad (x_i(0) = [\varphi_0]_i, \quad \dot{x}_i(0) = [\varphi_1]_i)$$

das Differentialsystem

$$(1') \quad \ddot{x}_i = \sum_k [f]_{i-k} x_k \quad (i = 0, \pm 1, \dots)$$

befriedigen. Es ergibt sich formell, daß für jedes $n (\geq 0)$

$$(4) \quad [\varphi_{n+2}]_i = \sum_k [f]_{i-k} [\varphi_n]_k,$$

das heißt

$$[\varphi_{n+2}]_i = M(f \varphi_n e_{-i}) = [f \varphi_n]_i,$$

also

$$\begin{aligned} [\varphi_{n+4}]_i &= \sum_k [f]_{i-k} [\varphi_{n+2}]_k = \sum_k [f]_{i-k} [f \varphi_n]_k \\ &= M(f f \varphi_n e_{-i}) = [f^2 \varphi_n]_i \end{aligned}$$

und allgemein

$$[\varphi_{n+2r}]_i = [f^r \varphi_n]_i,$$

mithin

$$[\varphi_{2n}]_i = [f^n \varphi_0]_i, \quad [\varphi_{2n+1}]_i = [f^n \varphi_1]_i \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

ist, so daß

$$(5) \quad \varphi_{2n}(v) \equiv (f(v))^n \varphi_0(v), \quad \varphi_{2n+1}(v) \equiv (f(v))^n \varphi_1(v).$$

Allerdings haben wir nur formell gerechnet, man kann jedoch offenbar die Sache auf die Gestalt einer vollständigen Induktion bringen. — Wie man sich leicht überzeugen kann (vgl. (1') mit (2)), können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $|t| < 1$. Dann ist, wenn

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|[\varphi_n]_i|}{n!} t^n$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \sum_i |\bar{x}_i(|t|)|^2 &\leq \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{[\varphi_n]_i \sqrt{i^n}}{n!} \right|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\sqrt{t^n}|^2 \\ &= \frac{1}{1-|t|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{(n!)^2} \sum_i |[\varphi_n]_i|^2. \end{aligned}$$

Da $\sum_i |[\varphi_n]_i|^2$ nach Bessel (bis auf einen absolut festen Faktor)

vermittelt $M(|\varphi_n|^2)$ abgeschätzt werden kann, so haben wir uns nur noch mit der Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{(n!)^2} M(|\varphi_n|^2)$$

zu beschäftigen; sie ist nach (5)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^{2n}}{(2n)!^2} M(|f^n \varphi_0|^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!^2} M(|f^n \varphi_1|^2).$$

Die erste der beiden letzten Summen (die ungerade läßt sich ebenso behandeln) ist mit Rücksicht auf die Schwarzsche Ungleichung und laut (2)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^{2n}}{(2n)!^2} \sqrt{M(|f|^{4n}) M(|\varphi_0|^4)} \\ &\leq \sqrt{M(|\varphi_0|^4)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^{2n} \sqrt{(4n)!} \Omega^{4n}}{(2n)!^2} \\ &\leq \sqrt{M(|\varphi_0|^4)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|4t^2 \Omega^2|^n}{(2n)!} < +\infty, \end{aligned}$$

womit die (eindeutige) Existenz der Lösung (3) bewiesen ist.¹⁾

Denn aus

$$\sum_i |\bar{x}_i(t)|^2 < +\infty \quad \text{und} \quad \sum_k |[f]_{i-k}|^2 = \sum_k |[f]_k|^2 < +\infty$$

folgt, daß die Umordnung der Doppelsumme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_k [f]_{i-k} [\varphi_n]_k,$$

welche beim Übergang von (4) zu (1') vorzunehmen ist, ihrer absoluten Konvergenz zufolge erlaubt ist.

Durch die obigen wird es ermöglicht, zur expliziten Darstellung der Normalschwingungen und der allgemeinen Lösung überzugehen. Wir setzen zur Abkürzung

$$x_i(t) = x_i(t; f; \varphi_0; \varphi_1); \quad \tilde{\omega}_i^{(k)}(t) = x_i(t; f; e_k, 0);$$

$$\tilde{\omega}_i^{[k]}(t) = x_i(t; f; 0, e_k).$$

Es sollen t , φ_0 , φ_1 festgehalten werden, so daß $x_i = x_i(f)$.

1) Es geht aus dem Beweise hervor, daß die eindeutige Existenz von (3) auch dann besteht, wenn an Stelle von (2) nur eine allgemeinere Abschätzung erfüllt ist. Der Grenzfall ist $\log^2 \varepsilon$.

Wir erklären in L das Grenzelement folgendermaßen: $f_1(v)$, $f_2(v)$, $f_3(v)$, ... geht für $l \rightarrow +\infty$ nach $f(v)$, wenn die $f_i(v)$ zu einem von l unabhängigen L_Q gehören und $M(|f - f_i|^2)$ mit l^{-1} nach Null geht. Es heiße eine Funktionale $\Phi(f)$ in L vollstetig, wenn sie auf jedem festem L_Q beschränkt ist und $\Phi(f) - \Phi(f_i)$ immer nach Null geht, wenn $f_i(v)$ für $l \rightarrow +\infty$ nach $f(v)$ geht. Wir behaupten, daß $x_i(f)$ (i ist fest) vollstetig ist. Mit Rücksicht auf die obigen Abschätzungen (man setze nur $\sum_{n=N}^{\infty}$ an Stelle von $\sum_{n=0}^{\infty}$) reduziert sich die Aufgabe darauf, zu beweisen, daß jedes $[\varphi_m]_i$, wobei auch m fest ist, vollstetig ist. Für $m=2$ und $m=3$ ist dies aber mit Rücksicht auf (4) nach der Hilbert-Riesz-Fischerschen Theorie trivial (denn z. B. aus $\sum_k |[\varphi_0]_k|^2 < +\infty$ folgt, daß die Linearform $\sum_k [\varphi_0]_k y_k$ vollstetig ist, und diese Hilbertsche Vollstetigkeit ist, wenn $y_k = [f]_{i-k}$ gesetzt wird, in Q bekanntlich mit der Mittelkonvergenz $M(|f - f_i|^2) \rightarrow 0$ äquivalent; n. b., der Auswahlssatz besteht in L nicht) und für $m > 3$ ergibt es sich ebenfalls aus (4) auf Grund einer vollständigen Induktion (es handelt sich, kurz gesagt, um eine Iteration von linearen vollstetigen Funktionalen). — Ebenso beweist man, daß $x_i(t)$ bei festem t , f , i von $\varphi_0(v)$ und $\varphi_1(v)$ vollstetig abhängt, so daß die Zerlegung I (4) auch jetzt besteht, wenn man entsprechende Annahmen macht über die Anfangswerte.

Es sei wieder $\varphi_0(v)$, $\varphi_1(v)$, t festgehalten, und es bewege sich die Funktion $f(v)$, von welcher wir jetzt wieder voraussetzen, daß sie reellwertig und gerade sei; um feste Vorstellungen zu haben, soll sie etwa aus endlich vielen analytischen Stücken bestehen (sie gehört zu L und sie kann dabei z. B. endlich viele logarithmische Unendlichkeitsstellen haben) und sei derart, daß sie im Falle der Beschränktheit kein diskontinuierliches, d. h. Punkt- oder Häufungsspektrum besitzen würde. Ist $f_i(v)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(v)$, und zugleich auch beschränkt, so gilt nach I

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^i\omega_i^{(k)}(t) = \int\limits_{\mathfrak{E}_i} \cos \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d {}^i\sigma_{ik}(\mu); \\ {}^i\omega_i^{[k]}(t) = \int\limits_{\mathfrak{E}_i} \sqrt{-\mu} \sin \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d {}^i\sigma_{ik}(\mu). \end{array} \right.$$

Es bedeutet hierbei \mathfrak{S}_i das Spektrum in der Hilbertschen Normierung, d. h. den Wertevorrat der Funktion $1/f_i(v)$, so daß der Punkt $\mu = 0$ in B (und nur in B) außerhalb von \mathfrak{S}_i gelegen ist; $\|\sigma_{ik}(\mu)\|$ ist die Spektralmatrix (die dabei an sich unbestimmte orthogonale Substitution der Variablen ist durch die Toeplitz-Hellingersche Regel festzulegen.) Alle diese Begriffe können nun leicht ersichtlich auch im Falle von $f(v)$ erklärt werden. Die einzeln beschränkten Funktionen $f_i(v)$ seien derart gewählt, daß sie mit unbegrenzt wachsendem l nach $f(v)$ gehen und abgesehen von den (von l abhängigen) unmittelbaren Umgebungen der Unendlichkeitsstellen von $f(v)$ sei $f_i(v) \equiv f(v)$. Man ersieht so, daß nicht nur

$${}^l\omega_i^{(k)} \longrightarrow \tilde{\omega}_i^{(k)}, \quad {}^l\omega_i^{[k]} \longrightarrow \tilde{\omega}_i^{[k]}$$

für $l \rightarrow \infty$, sondern daß auch die Darstellung (6) auch jetzt besteht, in dem Sinne, daß in (6) der Zeiger l unterdrückt werden darf. Insbesondere ist damit die Konvergenz dieser bei $\mu = 0$ gewiß uneigentlichen Integrale bewiesen. Es wäre interessant, wenn von diesen Transzendenten auf Grund ihrer obigen mechanischen Einführung durch ein Laurentsches Differentialsystem Oszillationstheoreme (Realität und Verteilung der Nullstellen) gefunden werden könnten.¹⁾

Zusatz bei der Korrektur (1. Oktober 1926)

Da wir [abgesehen von dem mit dem Ansatz (3) mitgeführten Divisoren $n!$, d. h. von einer Laplaceschen Transformation] nur mit der Hilbertschen Partialbruchzerlegung des Matrixenelementes der Reziproke zu tun haben, welches seinerseits (unter selbstverständlichen Voraussetzungen) als ein solches Integral betrachtet werden kann, dessen Entwicklung in ein Kettenbruch und in eine asymptotische Reihe von der Stieltjesschen Theorie studiert wird (n. b., auch bei uns braucht nicht die Matrix beschränkt zu sein), so wird dem Kenner der Literatur der Anschluß von meinen Rechnungen

1) Mit derartigen Problemen haben sich A. Hurwitz und Hr. G. Pólya befaßt, vgl. G. Pólya, Math. Ztschr. 2. S. 352—83. 1918.

an die Theorie der Kettenbrüche auf der Hand liegen; für den Fall der nicht beiderseits unendlichen Integrationsgrenzen vgl. z. B. die obige vorletzte Fußnote mit dem Konvergenzsatz von Hrn. H. Hamburger¹⁾, welchen Hr. T. Carleman²⁾ noch verallgemeinert hat.

Es sei in diesem Zusammenhange erwähnt, daß man sich bei der Behandlung der erzwungenen Schwingungen von (1), d. h. bei der der Dispersion, mit der oben angedeuteten mathematischen Schwierigkeit der Wellenmethode noch in erhöhtem Maße begegnet, da es dabei, wie bekannt, in dem Integrand *formell* Schwebungsdivisoren, also geradezu rationale Singularitäten eintreten; daß sie sich tatsächlich fortheben, läßt sich zeigen mit der obigen Methode der unbestimmten Koeffizienten und mit expliziter Heranziehung der verhüllt auch oben verwendeten Laplaceschen Transformation³⁾ kann man sogar auch geschlossene Ausdrücke erhalten.^{4) 5)}

1) Math. Ztschr. 4. S. 186—222. 1919.

2) Verhandlungen des fünften skandinavischen Mathematikerkongresses in Helsingfors 1922, S. 186—188.

3) Vgl. F. Bernstein u. G. Doetsch, Math. Ztschr. 22. S. 285 bis 292. 1925.

4) Wir haben vorausgesetzt, daß $f(v)$ endlich viele, höchstens solche Unendlichkeitsstellen hat, wie $(\log s)^\alpha$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$ bei $s = +0$. Ist $1 < \alpha < 2$, so bleibt der Existenzbeweis für die ganze t -Ebene in Kraft, während im Grenzfalle $\alpha = 2$ nur für einen hinreichend kleinen t -Kreis und bei $\alpha > 2$ können die Reihen (3) offenbar den Konvergenzradius Null haben; da diese Reihen auch dann eindeutig berechnet werden können, so könnte man versuchen, sie zur Gewinnung von nichtholomorphen Lösungen mittels den Borelschen exponentiellen Methoden zu summieren, wenigstens im „stabilen“ Falle $\mu \leq 0$.

5) Der oben nicht näher ausgeführte Beweis der Behauptung, nach welcher $[q_m]$ bei festem q_0, q_1, m, i von f vollständig abhängt, ergibt sich mit Heranziehung der Schwarzchen Ungleichung (unmittelbarer als oben angedeutet) aus der vor (5) erhaltenen Darstellung von $(q_m)_i$, wenn man beachtet, daß $(f - f_i)$ in $(f^* - f_i^*)$ aufgeht. Unnötig zu bemerken, daß in I vorausgesetzt ist, daß die $f_i(v)$ *gleichmäßig* beschränkt sind; sonst ist der Beweis, der auf $M \leq 1$ beruht, geradezu falsch; ein Mißverständnis ist jedoch nicht zu befürchten, mit Rücksicht auf die übliche Definition des Grenzelementes in B. Vgl. z. B. H. Steinhaus, Math. Ztschr. 5. S. 187, 190. 1919.

(Eingegangen 12. September 1926)

**5. Zur gastheoretischen Begründung
der Stokes-Cunninghamschen Formel;
von Th. Sexl**

Bereits J. Weyssenhoff¹⁾ hat „auf die äußerst schwachen theoretischen Grundlagen der so oft angewandten Stokes-Cunninghamschen Formel hingewiesen“, ohne jedoch diese Ansicht näher zu begründen. Darüber hinausgehend soll im ersten Teile vorliegender Untersuchung gezeigt werden, daß die Stokes-Cunninghamsche Formel unhaltbar ist. Im zweiten Teile werden positive Betrachtungen angegeben, die zur strengen gastheoretischen Begründung einer mit der Stokes-Cunninghamschen formal identischen Formel führen, deren Konstante jedoch eine gänzlich andere physikalische Bedeutung hat.

Bekanntlich handelt es sich um folgendes Problem: Es soll der Widerstand berechnet werden, den eine unter dem Einfluß einer konstanten Kraft \mathfrak{Q} mit konstanter Geschwindigkeit v in einem unbegrenzten inkompressiblen Medium mit dem Koeffizienten der inneren Reibung μ sich „langsam“ bewegende Kugel vom Radius a erfährt. Da bei dieser Problemstellung die Mediumsbewegung in bezug auf ruhende Achsen nicht stationär sein kann, pflegt man das Problem durch ein analoges zu ersetzen, indem man die Kugel als im Koordinatenursprung ruhend und das Medium als im Unendlichen mit der konstanten Geschwindigkeit v strömend annimmt. Wir betrachten von vornherein die Verhältnisse in Gasen. Der Radius der Kugel kann nun groß, vergleichbar oder klein gegen die mittlere freie Weglänge l des Gases sein. Dies bedingt eine Dreiteilung des Problems.

Gehen wir zunächst allgemein vor, so haben wir nach dem

1) J. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. 62. S. 1. 1920.

Geschwindigkeitsverteilungsgesetz¹⁾ $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$ in einem sich mit beliebiger makroskopischer Geschwindigkeit u_0, v_0, w_0 bewegenden Gase zu fragen. Diese Frage wurde von Boltzmann²⁾ beantwortet. Boltzmann erhielt als Lösung seiner partiellen Differentialgleichung:

$$f = f^{(0)} (1 + b_{11} \xi_0^2 + b_{22} \eta_0^2 + b_{33} \zeta_0^2 + b_{12} \xi_0 \eta_0 + b_{13} \xi_0 \zeta_0 + b_{23} \eta_0 \zeta_0),$$

worin

$$f^{(0)} = e^{\alpha - h(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)}, \quad \xi_0 = \xi - u_0, \quad \eta_0 = \eta - v_0, \quad \zeta_0 = \zeta - w_0,$$

$$b_{11} = \frac{2\mu}{3} \frac{2}{q} \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 \operatorname{div} v_0 - \frac{2}{q} \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 2\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ = - \frac{2h^2}{q} (p_{xx} + p) = - \frac{2h^2}{q} p'_{xx},$$

$$b_{22} = - \frac{2h^2}{q} p'_{yy},$$

$$b_{33} = - \frac{2h^2}{q} p'_{zz}$$

und

$$b_{12} = - \frac{2}{q} \left(\frac{m}{2kT} \right)^2 2\mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = - \frac{2h^2}{q} \cdot 2p_{xy},$$

$$b_{23} = - \frac{2h^2}{q} \cdot 2p_{yz},$$

$$b_{31} = - \frac{2h^2}{q} \cdot 2p_{xz}$$

bedeuten.

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Veränderlichkeit von h, a, u_0, v_0, w_0 als Funktionen von x, y, z, t (d. h. ihre Differentialquotienten nach diesen Variablen) klein sind. Dies ist bei dem Problem der langsamen Bewegung erfüllt. Die Forderung der Langsamkeit der Bewegung ermöglicht außerdem die Entwicklung der Exponentialfunktion $f^{(0)}$ in eine Reihe nach u_0, v_0, w_0 , wobei nach dem ersten Gliede abgebrochen werden kann, da Quadrate und Produkte dieser Größen vernachlässigt werden können. Überdies gewährleistet sie die Erfüllung der

1) x, y, z Koordinaten eines Moleküls, ξ, η, ζ Geschwindigkeitskomponenten des betreffenden Moleküls in den Koordinatenrichtungen, t Zeit.

2) L. Boltzmann, Vorl. über Gastheorie, 3. Aufl., S. 185, 1923; Joh. Ambr. Barth, Leipzig.

Inkompressibilitätsbedingung $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$, denn die Kontinuitätsgleichung geht für den stationären Zustand in

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_0) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \rho = \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \rho' \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \rho' \\ = \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$$

über, da Glieder zweiter Ordnung in den Geschwindigkeiten vernachlässigt werden sollen. $[\rho_0 = \text{const}; \rho' = \rho'(u_0, v_0, w_0); \rho = \rho_0 + \rho']$

Das gesuchte Geschwindigkeitsverteilungsgesetz wird daher:

$$f = A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \left[1 + 2h(u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta) - \frac{2h^2}{\rho} (p'_{xx} \xi^2 + p'_{yy} \eta^2 + p'_{zz} \zeta^2 + 2p'_{xy} \xi \eta + 2p'_{yz} \eta \zeta + 2p'_{zx} \zeta \xi) \right].$$

Dieses Verteilungsgesetz wurde kürzlich von Epstein¹⁾ nach einer von der Boltzmannschen Methode gänzlich verschiedenen Methode bestätigt. Allerdings hat Boltzmann sein Verteilungsgesetz unter der Voraussetzung abgeleitet, daß sich die Moleküle mit einer der 5-ten Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstoßen. Doch fällt diese Voraussetzung im endgültigen Verteilungsgesetz heraus, da sie ersichtlicherweise nur den gas theoretischen Wert von μ beeinflusst.

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden.

1. $a \ll l$. Der Radius a der Kugel ist so klein gegenüber der mittleren freien Weglänge l des Gases, daß im Gase keine Druck- und Zugspannungen auftreten und das Gas als mit konstanter Geschwindigkeit bewegt betrachtet werden kann. u_0, v_0, w_0 sind also in diesem Falle konstant, $b_{ik} = 0$ oder $p'_{xx} = \dots = p'_{zz} = 0$. Das Verteilungsgesetz nimmt die einfache Gestalt an:

$$f = A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} [1 + 2h(u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta)].$$

2. $a \gg l$. Der Radius der Kugel ist groß gegenüber der mittleren freien Weglänge. Die Kugel ruft Druck- und Zugspannungen im Gase hervor. $b_{ik} \neq 0$ und u_0, v_0, w_0 sind Funktionen von x, y, z, t .

3. $\frac{a}{l} \sim 1$. Radius und freie Weglänge sind von derselben Größenordnung. In diesem Falle harret das Problem noch seiner theoretischen Lösung.

1) P. S. Epstein, Phys. Rev. 23. S. 710. 1924.

Cunningham¹⁾ setzt voraus $a \ll l$, behandelt also den ersten Fall und berechnet zunächst den Impuls, den die Kugel erfährt. Für den Fall elastischer Zusammenstöße zwischen Gasmolekülen und Kugel erhält er den bereits von Langevin²⁾ angegebenen Ausdruck

$$J = \frac{4\pi}{3} N m \bar{c} a^2 v = \frac{6\pi\mu a^2}{(A+D)l} v,$$

worin $A + D = \frac{9\pi}{2} = 1,575$ bedeutet.³⁾ (π .. Proportionalitätsfaktor im Reibungskoeffizienten $\mu = \pi \rho \bar{c} l$.) Weiter schließt er folgendermaßen (a. a. O., S. 360):

„We may obtain now a modification of the law, taking into account the machinery by which the transfer of momentum from particle to fluid takes place. This is not considered in the ordinary hydrodynamical investigation. Instead, a kinematic assumption is made, namely, that the mass velocity in the neighbourhood of the particle is V . Let us assume, in place of this, that the mass velocity is kV . Then the rate of dissipation of momentum on the hydrodynamical theory is $6\pi\mu a kV$, a being used now for the effective radius of the particle, inasmuch as it assumed to be large compared with the molecule. In the steady motion this diffusion of momentum must just balance the momentum communicated by the particle to the gas. Taking M large compared with m , this is, from the above formula

$$\frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi m}{h}} a^2 n (V - kV). \text{ Hence } 6\pi\mu a kV = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi m}{h}} a^2 n (V - kV)."$$

Diese Gleichung ergibt den Wert für k und man erhält so die bekannte Formel $J = \frac{6\pi\mu a}{1 + (A+D)\frac{l}{a}} v$, wobei $A + D$ den oben angegebenen Wert hat.

1) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. (1) 83. S. 357. 1910.

2) P. Langevin, Ann. d. Ch. et d. Phys. 5. S. 245. 1905.

3) Bei Cunningham findet man den Wert $\frac{1,63}{f+2(1-f)}$ angegeben. Dieser Wert ist nach F. Zerner, Phys. Ztschr. 20. S. 546. 1919 in den oben angegebenen Wert zu korrigieren.

Ersichtlicherweise ist aber diese Schlußweise hinfällig, denn sie widerspricht den gemachten Voraussetzungen. Denn bei einer Kugel, die voraussetzungsgemäß so klein sein soll, daß sie keine Zug- und Druckspannungen im Gase hervorruft, kann weder von einer von der Kugel mitgeführten Gasschicht gesprochen werden noch dürfen auf diese Gasschicht hydrodynamische Formeln angewandt werden, wobei noch überdies der Radius der mitbewegten Gasschicht gleich dem der Kugel gesetzt werden muß. Die Formel $\frac{6\pi\mu a}{1 + (A + D)\frac{l}{a}}$ kann also nicht aufrecht erhalten werden.

Aus dem bereits Gesagten dürfte es wohl genügend klar sein, innerhalb welcher Grenzen der Langevin-Cunningham-sche Ausdruck $\frac{6\pi\mu a^3}{(A + D)l} \cdot v$ angewandt werden kann. Der Genauigkeit halber sei noch erwähnt, daß bei kleinsten Radien die bekannten Lenardschen Korrekturen anzubringen sind.

Wir wenden uns nun positiven Betrachtungen zu und wollen zeigen, wie man in einwandfreier Weise zu der Cunningham'schen Bauart des Widerstandsfaktors gelangen kann. Wir betrachten den zweiten der oben unterschiedenen drei Fälle, setzen also voraus, daß der Kugelradius groß gegen die mittlere freie Weglänge ist, so daß also die Kugel Zug- und Druckspannungen im Gase hervorruft. Das Verteilungsgesetz im freien Gase lautet:

$$f = A e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \left[1 + 2h(u_0\xi + v_0\eta + w_0\zeta) - \frac{2h^2}{\varphi}(p'_{xx}\xi^2 + \dots + 2p_{xz}\xi\zeta) \right],$$

wobei für den stationären Zustand die Abhängigkeit der Größen A , h , u_0 , v_0 , w_0 , p'_{xx} , ..., p_{xz} von t wegfällt.

Sind nun ϑ und φ Polarwinkel gegen die Richtung, in der das Gas im Unendlichen strömt, und orientieren wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem in bezug auf ein Oberflächenelement der Kugel $dF = a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ so, daß die x -Achse in die Richtung der äußeren Flächennormalen zeigt, während die y -Achse senkrecht dazu in der durch die äußere Flächennormale und die v -Richtung gelegten Ebene zu liegen kommt,

so ist der auf das Flächenelement in der Zeiteinheit von den Gasmolekülen in der v -Richtung übertragene Impuls

$$J dF = \int m (\xi \cos \vartheta - \eta \sin \vartheta) \xi \cdot f d\xi d\eta d\zeta \cdot dF = \left\{ \frac{Nm}{2h} \cos \vartheta - \frac{1}{2} (3p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz}) \cos \vartheta + p_{xy} \sin \vartheta \right\} dF = (p \cos \vartheta - p'_{xx} \cos \vartheta + p_{xy} \sin \vartheta) dF = (-p_{xx} \cos \vartheta + p_{xy} \sin \vartheta) \cdot dF,$$

wobei die Relation $p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz} = \text{div } v_0 = 0$ benutzt wurde.

Der gesamte auf die Kugel übertragene Impuls ergibt sich durch Integration über die Kugeloberfläche. Hierzu müssen p_{xx} und p_{xy} als Funktionen von ϑ und φ bekannt sein.¹⁾ Diese Berechnung erfolgt aus den nach der Boltzmannschen Methode gleichzeitig mit dem Verteilungsgesetz sich ergebenden hydrodynamischen Gleichungen in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung und ergibt je nach den Grenzbedingungen an der Kugeloberfläche verschiedene Resultate.

Welche Grenzbedingungen sind nun vom gastheoretischen Standpunkte aus anzusetzen? Diese Frage beantworten wir, indem wir von den Bauleschen²⁾ Vorstellungen über die Wechselwirkung zwischen Gasmolekülen und einer festen Wand ausgehen. Der feste Körper wird als ein schwingendes kubisches Raumgitter aufgefaßt, auf den ein Molekülschwarm mit einer mittleren Geschwindigkeit zufliegt. Von diesen Molekülen stoßen einige einmal, andere zweimal usw. mit den Molekülen des festen Körpers zusammen, während einige Moleküle in das Innere des festen Körpers eindringen und erst nach längerer Zeit den Weg ins Freie wiederfinden. Die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten der auffallenden Moleküle sind u_0 , v_0 , w_0 . Die mittleren sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten der einmal mit einem Wandmolekül zusammengeannten Moleküle nach dem Stoß ergeben sich nach Baule aus den Stoßgesetzen zu $u^{(1)} = \alpha u_0$, $v^{(1)} = \alpha' v_0$, $w^{(1)} = \alpha' w_0$. Darin bedeuten α und α' Funktionen der Massen m des Gasmoleküls und m^* des Wandmoleküls, deren explizite Gestalt für das nachfolgende ohne Belang ist. Für die zweimal, drei-

1) Dies bedeutet ersichtlicherweise die Komplikation gegenüber dem Fall $\alpha \ll 1$, für den u_0 , v_0 , w_0 im ganzen Raume konstant sind.

2) B. Baule, Ann. d. Phys. 44. S. 145. 1914.

mal usw. zusammengestoßenen Moleküle folgt dann $u^{(n)} = \alpha^n u_0$, $v^{(n)} = \alpha'^n v_0$ und $w^{(n)} = \alpha'^n w_0$. Werden nun $n^{(1)}$ -Moleküle nach einmaligem Zusammenstoß in das Gas zurückgeworfen und allgemein $n^{(n)}$ nach n -maligem, so folgt für die mittleren sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten aller von der Wand fortfliegenden Moleküle

$$\bar{u} = \frac{\sum \alpha^n n^{(n)}}{\sum n^{(n)}} \cdot u_0,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum \alpha'^n n^{(n)}}{\sum n^{(n)}} \cdot v_0,$$

$$\bar{w} = \frac{\sum \alpha'^n n^{(n)}}{\sum n^{(n)}} \cdot w_0.$$

Da die genaue Bestimmung der $n^{(n)}$ mathematisch nicht möglich erscheint, muß man sich mit Baule mit folgender Näherung begnügen: Alle Gasmoleküle, die beim Zusammenstoß mit einem Molekül des obersten Flächengitters eine positive ξ -Komponente erhalten, sollen als nur einmal zusammengestoßen gelten, während alle anderen Moleküle als unendlich oft angestoßen gelten. Mit dieser Annahme wird ($\alpha, \alpha' < 1$)

$$\bar{u} = \frac{\alpha n^{(1)}}{n} u_0 = \alpha \nu u_0,$$

$$\bar{v} = \frac{\alpha' n^{(1)}}{n} v_0 = \alpha' \nu v_0,$$

$$\bar{w} = \frac{\alpha' n^{(1)}}{n} w_0 = \alpha' \nu w_0.$$

Es gehören somit von n auffallenden Molekülen νn in die Gruppe der einmal angestoßenen, $(1 - \nu)n$ in die Gruppe der unendlich oft angestoßenen Moleküle. In unmittelbarer Nähe der Wand sind also 3 Molekülgruppen zu unterscheiden. Die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der auf die Wand zufliegenden Moleküle ist:

$$f = N \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} \left[1 + 2h(u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta) - \frac{2h^2}{q} (p'_{xx} \xi^2 + \dots + 2p_{xz} \xi \zeta) \right],$$

die der einmal mit einem Wandmolekül zusammengestoßenen Moleküle ist:

$$f' = N' \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h[(\xi - \alpha u_0)^2 + (\eta - \alpha' v_0)^2 + (\zeta - \alpha'' w_0)^2]} \\ = N' \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} [1 + 2h(\alpha u_0 \xi + \alpha' v_0 \eta + \alpha'' w_0 \zeta)],$$

die der unendlich oft zusammengestoßenen Moleküle ist:

$$f^* = N^* \left(\frac{h}{\pi} \right)^{3/2} e^{-h(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}.$$

Im stationären Zustande müssen nun folgende Bedingungen erfüllt sein: 1. muß die Anzahl der auffallenden Moleküle gleich der Anzahl der weggehenden sein; 2. muß die „auffallende“ Energie gleich der „weggehenden“ Energie sein; 3. müssen in bezug auf Druck- und Zugspannungen die weggehenden Moleküle dieselben Wirkungen hervorrufen wie Moleküle, die nach dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz der auffallenden Moleküle von dem Flächenelement weggehen. Diese Bedingungen liefern die folgenden acht Integrale:

$$(1) \quad - \int_{\xi < 0} \xi f d\xi d\eta d\zeta = \int_{\xi > 0} \xi (f' + f^*) d\xi d\eta d\zeta, \\ (2) \quad \left\{ \begin{aligned} - \int_{\xi < 0} \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \cdot \xi f d\xi d\eta d\zeta \\ = \int_{\xi > 0} \frac{m}{2} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \cdot \xi (f' + f^*) d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \right. \\ (3) \quad \left\{ \begin{aligned} - \int_{-\infty < \xi < +\infty} m \xi \cdot \xi f d\xi d\eta d\zeta &= \int_{\xi < 0} m \xi \cdot \xi f d\xi d\eta d\zeta \\ &+ \int_{\xi > 0} m \xi \cdot \xi (f' + f^*) d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \right.$$

und fünf dem letzten analoge.

Von diesen acht Integralen liefern die ersten fünf unter Benützung der Relation $p'_{xx} + p'_{yy} + p'_{zz} = 0$ nachfolgende fünf Gleichungen:

$$(1a) \quad N(1 - u_0 \sqrt{\pi h}) - \frac{Nh}{\varrho} p'_{xx} = N^* + N'(1 + \alpha u_0 \sqrt{\pi h}),$$

$$(2a) \quad N\left(1 - \frac{5}{4} u_0 \sqrt{\pi h}\right) - \frac{3}{2} \frac{Nh}{\varrho} p'_{xx} = N^* + N'\left(1 + \frac{5}{4} \alpha u_0 \sqrt{\pi h}\right),$$

$$(3a) \quad N\left(1 + 4 u_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}}\right) - 2 \frac{Nh}{\varrho} p'_{xx} = N^* + N'\left(1 + 4 \alpha u_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}}\right),$$

$$(4a) \quad N \left(1 + 2u_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}} \right) - 2 \frac{Nh}{\varrho} p'_{yy} = N^* + N' \left(1 + 2\alpha u_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}} \right),$$

$$(5a) \quad N \left(1 + 2u_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}} \right) - 2 \frac{Nh}{\varrho} p'_{zz} = N^* + N' \left(1 + 2\alpha u_0 \sqrt{\frac{h}{\pi}} \right).$$

Falls nun p'_{xz} und $u_0 \neq 0$, führen diese Gleichungen in einfacher Weise zu einem Widerspruch. Sie können also nur zusammenstehen, wenn $u_0 = p'_{xz} = p'_{yy} = p'_{zz} = 0$ und gehen dann alle über in

$$N = N^* + N'.$$

Aus dieser Gleichung folgt $N' = \nu N$ und $N^* = (1 - \nu)N$.

Die drei letzten Integrale ergeben

$$(6a) \quad p_{xy} = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi h}} \frac{1 - \alpha'\nu}{1 + \alpha'\nu} \bar{v}_0,$$

$$(7a) \quad p_{xz} = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi h}} \frac{1 - \alpha'\nu}{1 + \alpha'\nu} \bar{w}_0,$$

$$(8a) \quad p_{zy} = 0.$$

Darin bedeuten \bar{v}_0 und \bar{w}_0 die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten des Gases in unmittelbarer Nähe der Wand. Bezeichnen wir mit β den Koeffizienten der äußeren Reibung, so haben wir für ein *ebenes* Flächenelement den Ansatz gewonnen:

$$u_0 = 0, \quad \bar{v}_0 = \frac{p_{xy}}{\beta} \quad \text{und} \quad \bar{w}_0 = \frac{p_{xz}}{\beta}.$$

Diese Grenzbedingungen sind mit dem phänomenologischen Ansatz Bassets¹⁾ identisch, wenn wir \bar{v}_0 , \bar{w}_0 mit den Geschwindigkeiten an der Oberfläche identifizieren.

Übertragen wir nun mit Basset¹⁾ *hypothetisch* diesen Ansatz für ein *ebenes* Flächenelement auch auf ein Flächenelement mit genügend *großem Krümmungsradius*, so finden wir mit Basset aus den hydrodynamischen Gleichungen

$$p_{xz} = -p + \frac{\frac{3\mu}{\beta a}}{1 + \frac{3\mu}{\beta a}} \cdot \frac{2\mu\nu}{a} \cos \vartheta = -p + \left[\frac{\nu l^2}{a^2} \right],$$

1) A. B. Basset, Hydrodynamics, Vol. II, S. 271.

$$p_{xy} = -\frac{3}{2} \frac{v \mu \sin \vartheta}{a} \frac{1}{1 + \frac{3\mu}{\beta a}} = \left[\frac{v l}{a} \right], ^1)$$

wenn v die Geschwindigkeit im Unendlichen bedeutet.

Im Hinblick auf diese beiden Ausdrücke ist nun der Sinn der oben gefundenen Grenzbedingungen ($p'_{xz} = 0$ usw.) offenbar der, daß wir bei der Impulsberechnung nur bis auf Glieder zweiter Ordnung in l/a zu rechnen haben. Berücksichtigen wir dies, so wird

$$p = p_0 - \frac{3}{2} \frac{v \mu \cos \vartheta}{a} \left(1 - \frac{\mu}{\beta a} \right)$$

und somit

$$p_{xx} = -p_0 + \frac{3}{2} \frac{v \mu \cos \vartheta}{a} \left(1 + \frac{3\mu}{\beta a} \right)$$

$$p_{xy} = -\frac{3}{2} \frac{v \mu \sin \vartheta}{a} \left(1 - \frac{3\mu}{\beta a} \right).$$

Setzen wir dies in den oben angegebenen Ausdruck für $J dF$ ein, so wird

$$J dF = \left[p_0 \cos \vartheta - \frac{3}{2} \frac{v \mu \cos^3 \vartheta}{a} \left(1 + \frac{3\mu}{\beta a} \right) - \frac{3}{2} \frac{v \mu \sin^3 \vartheta}{a} \left(1 - \frac{3\mu}{\beta a} \right) \right] \cdot dF$$

und nach Integration über die ganze Kugeloberfläche

$$J = 6 \pi \mu a v \left(1 - \frac{\mu}{\beta a} \right).$$

Setzen wir nun für $\mu (= 0,3502 \varrho \bar{c} l)$ und $\beta \left(= \frac{\varrho \bar{c}}{2} \frac{1 - \alpha' v}{1 + \alpha' v} \right)$ ihre gastheoretischen Werte ein und berücksichtigen, daß die angegebene Formel nur so lange gelten kann, als $\left(\frac{l}{a} \right)^3$ gegenüber $\frac{l}{a} < 1$ sehr klein ist, so erhalten wir schließlich in hergebrachter Schreibweise

1) Hieraus ersieht man besonders deutlich, wie in den drei zu Anfang unterschiedenen Fällen die Impulssätze vor sich gehen. Für $a \gg l$ spielen nur die Scherungskräfte eine Rolle, für $\frac{a}{l} \sim 1$ sind p_{xy} und p'_{xz} von derselben Größenordnung, während für $a \ll l$ (gastheoretischer Fall) gerade das für den hydrodynamischen Fall zu vernachlässigende p'_{xz} ausschlaggebend wäre.

$$J = \frac{6\pi \mu a v}{1 + \frac{\mu}{\beta a}} = \frac{6\pi \mu a v}{1 + A \frac{l}{a}},$$

worin $A = 0,7004 \frac{1 + \alpha'v}{1 - \alpha'v}$.

Formal ist dieser Ausdruck mit dem von Cunningham durch seine unhaltbare Argumentation gewonnenen identisch. Die physikalische Bedeutung (und der numerische Wert) der konstanten A ist jedoch eine gänzlich andere als die der Konstanten $A + D$ im Cunninghamschen Ausdruck. Während A den Proportionalitätsfaktor im Gleitungskoeffizienten $\gamma = Al$ bedeutet, ist $A + D$ der Proportionalitätsfaktor im molekularen Widerstand. Daß die Übertragung der für ein ebenes Flächenelement gewonnenen Grenzbedingungen auf ein gekrümmtes Flächenelement von genügend großem Krümmungsradius gestattet ist, scheint von vornherein plausibel und wurde durch das Experiment bestätigt.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man die zuletzt durchgeführten Rechnungen auch auf Grund der Maxwellschen Annahmen über die Reflexion der Gasmoleküle an der festen Wand ausführen kann und zu denselben Resultaten wie auf Grund der Bauleschen Vorstellungen gelangt, nur hat man $1 - \alpha'v$ durch f (Bruchteil der diffus reflektierten Moleküle) zu ersetzen.

Universität Wien, III. Phys. Inst., September 1926.

(Eingegangen 15. September 1926)

**6. Bemerkung zu Hrn. Knodels Arbeit:
 „Über die Gasströmung in Röhren
 und den Luftwiderstand von Kugeln“;
 von Ludwig Schiller**

Unter dem obigen Titel gibt Hr. Knodel einen ausführlichen Auszug seiner Heidelberger Dissertation.¹⁾ Es ist zu bedauern, daß Hr. Knodel die Resultate seiner Messungen nicht in „Dimensionslosen“ dargestellt hat, da diese Darstellung außerordentliche Vorzüge betr. Ökonomie und einer geradezu automatischen Kritik aufweist. Es ist sehr wahrscheinlich, daß in diesem Fall Hr. Knodel in wesentlichen Punkten zu einer sehr veränderten Diskussion seiner Messungen gekommen wäre.

Neben einem kurzen Hinweis darauf, daß die experimentelle Feststellung des Kugelwiderstandes (Teil II der Knodelschen Arbeit) seit den früheren Untersuchungen von Liebster²⁾ bereits auf breiterer Basis³⁾, in übersichtlicherer Form (Darstellung in Dimensionslosen) und mit theoretisch einwandfreien Resultaten⁴⁾ vorliegt, will ich mich darauf beschränken, vom Standpunkt des Ähnlichkeitsgesetzes zu dem Ergebnis des ersten Teiles „Über die Gasströmung in Röhren“ Stellung zu nehmen, da Hr. Knodel dies mehrfach in Gegensatz zu meinen eigenen Untersuchungen stellt.

Hr. Knodel findet bei Übergang zu *weiteren* Röhren Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz, von denen er behauptet, daß sie nicht von Einlaufstörungen herrühren, auch nicht Anlaufeffekt im Sinne der „Anlauftheorie“ seien. In den

1) A. Knodel, Ann. d. Phys. 80. S. 533. 1926.

2) H. Liebster u. L. Schiller, Phys. Zeitschr. 25. S. 670. 1924.

3) Gegenüber einem Bereich bei Knodel von Reynoldsscher Zahl 10 bis 140 erstrecken sich die Messungen von Liebster von 0,07 bis 1200.

4) Die von Hrn. Knodel behauptete Abhängigkeit des Reibungsfaktors von der Geschwindigkeit bei gleichzeitiger Unabhängigkeit vom Kugelradius widerspricht, wie man leicht zeigen kann, dem Ähnlichkeitsgesetz!

gleichen Fällen folgert er aus seinen Messungen starke Unterschreitungen der „kritischen Reynoldsschen Zahl“ gegenüber dem Wert 1160. Was ist hierzu zunächst prinzipiell, d. h. vom Standpunkt des Ähnlichkeitsgesetzes aus, zu sagen? Das Strömungsbild in einem Rohrquerschnitt und damit der Widerstand an dieser Stelle ist bei konstanten Zuströmungsbedingungen be-

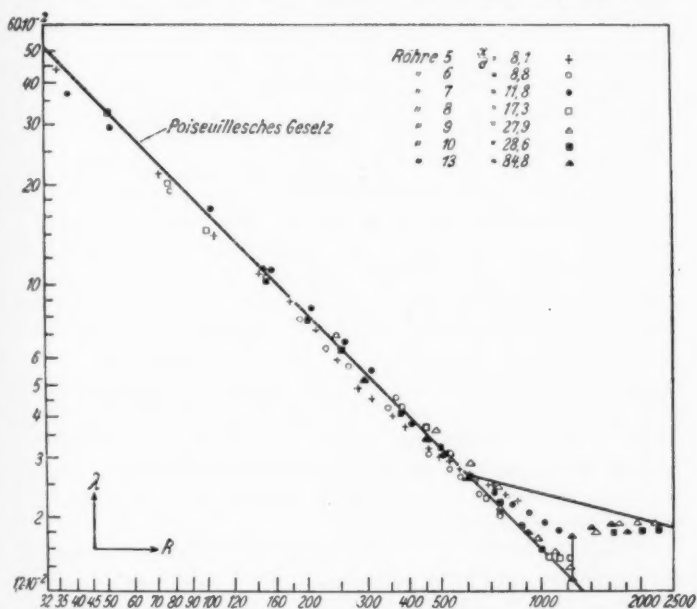


Fig. 1

stimmt durch drei Dimensionslose, die Reynoldssche Zahl, die relative Anlaufänge λ und die relative Rauigkeit. Da die von Knodel beobachteten Abweichungen bei *weiten* Röhren auftreten, scheidet zu ihrer Begründung die relative Rauigkeit aus, da diese bei „technisch glatten“ Rohren gerade nur bei sehr *engen* Röhren in Frage kommen kann. Es bleibt also nur die „relative Anlaufänge“ übrig, und gerade diese will Hr. Knodel ausschließen.

Daß wir mit diesem, von dem Ähnlichkeitsprinzip gewiesenen Weg den richtigen haben, zeigt eine Darstellung der

von Hrn. Knodel gemessenen Widerstandswerte in den Dimensionslosen „Reynoldssche Zahl“ und „Widerstandsbeiwert“, die mein Mitarbeiter, Hr. H. Kirsten II, durchgeführt hat (Fig. 1). Man sieht, daß die Röhren 13, 10 und 9 mit den großen relativen Anlaufängen (auf den Durchmesser bezogen) 84,8, 28,6 und 27,9 recht gut mit dem Poiseuilleschen Gesetz übereinstimmen und auch als kritische Zahl etwa 1200 ergeben, daß dagegen Röhre 7 und 5 mit den kleinen Anlaufängen 11,8 und 8,1 wohl bei kleinen Reynoldsschen Zahlen sich auch normal verhalten, dagegen mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen zunehmende Abweichungen vom Poiseuilleschen Gesetz zeigen — das typische Bild bei zu kurzem Abstand vom Einlauf!

Sonach kann kein Zweifel mehr bestehen, daß dieser zu kurze Abstand trotz Hrn. Knodels gegenteiliger Behauptung doch den Grund für die beobachteten Abweichungen darstellt. Es bleibt jetzt noch die Frage zu beantworten, ob Einlaufstörungen (d. h. am Einlauf losgelöste Wirbel) oder Anlaufdruckverlust für die Widerstandserhöhung verantwortlich zu machen sind. Eine von mir hierzu angestellte quantitative Nachprüfung der Verhältnisse für Rohr 7 an Hand meiner Anlauftheorie lieferte zwar keine völlige Übereinstimmung mit den Messungen, was wegen des Filters am Beginn des Rohres nicht wundernehmen kann. Das Ergebnis zeigt jedoch immerhin, daß die beobachtete Abweichung vom Poiseuilleschen Gesetz im wesentlichen dem Beschleunigungsverlust in der Anlaufstrecke zuzuschreiben ist.¹⁾

Was schließlich noch die angeblichen Unterschreitungen der kritischen Zahl 1160 anlangt, so zeigt eine Betrachtung der Fig. 1 in Zusammenhang mit den obigen Entwicklungen unmittelbar, daß der von Hrn. Knodel für die weiteren Röhren angenommenen „kritischen Zahl“ 450 diese Bedeutung nicht zukommt, sie vielmehr nur ungefähr die Stelle bezeichnet, von der an bei den weiteren Röhren der zusätzliche Anlaufwiderstand sich bemerkbar macht.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik, 1. Oktober 1926.

1) Übrigens in Einklang mit Hrn. Knodels Feststellung, daß an der Meßstelle keine Wirbelung zu beobachten war.

7. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen; von Friedrich Kottler

(Erwiderung auf die neuerlichen Bemerkungen von A. Rubinowicz)

Zu diesem Thema bin ich genötigt, infolge einer jüngst erschienenen Antwort (IV) des Hrn. Rubinowicz auf meine vor 2 Jahren gegebene Erwiderung (C) zu seinen damaligen Bemerkungen (III) nochmals das Wort zu ergreifen.¹⁾ Ich werde mich aber mit einigen Stichproben begnügen, die wohl zur endgültigen Aufklärung der von Hrn. R. aufgeworfenen Prioritätsfragen hinreichen dürften.

1. Folgendes ist die Vorgeschichte dieser Polemik: In meiner Arbeit A habe ich eine neue physikalische Konstruktion eines schwarzen Schirms gegeben, die eine Weiterbildung der bekannten Auffassung Voigts von der offenen Tür in einen nichtphysikalischen Raum hinaus ist. Hieraus habe ich gefolgert, daß im Gegensatz zu Kirchhoff und *allen* seinen Nachfolgern die Beugung an schwarzen Schirmen *nicht* durch ein *Randwertproblem*, sondern durch ein *Sprungwertproblem* zu erfassen ist. Und zwar gibt es *zwei* Sprungwertprobleme. Das *erste* bezieht sich auf die beleuchtete Oberfläche des schwarzen Schirms, an welcher die Lichtfunktion (im physikalischen Raum betrachtet) einen durch die erwähnte Konstruktion dieses Schirms vorgegebenen Sprung erleidet; es liefert die für Schirme beliebiger Gestalt gültige Kirchhoffsche Lösung und leistet dadurch eine *Rehabilitierung* derselben gegenüber

1) Im folgenden werden zitiert: F. Kottler, Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen, Ann. d. Phys. 70. S. 405. 1923 als A; derselbe, Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen, Ann. d. Phys. 71. S. 457. 1923 als B; derselbe, Erwiderung auf die Bemerkungen von E. Maey u. A. Rubinowicz, Ann. d. Phys. 75. S. 634. 1924 als C. Ferner A. Rubinowicz, Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie, Ann. d. Phys. 53. S. 257. 1917 als I; derselbe, Zur Kirchhoffschen Beugungstheorie, Ann. d. Phys. 73. S. 339. 1924 als II; derselbe, Bemerkungen zur Arbeit von F. Kottler, Ann. d. Phys. 74. S. 459. 1924 als III; derselbe, Antwort auf die Erwiderung von F. Kottler, Ann. d. Phys. 81. S. 140. 1926 als IV.

den wohlbekannten schwerwiegenden Widersprüchen, die diese Lösung aufweist, wenn sie in ein Randwertproblem eingekleidet wird (A, Abschnitte I—IV). Das zweite Sprungwertproblem bezieht sich auf die Grenze des geometrischen Schattens und ist im Falle einer Halbebene leicht lösbar; hier liefert es, je nach Wahl der Periodizität, sowohl die aus der Kirchhoffschen Theorie folgende als auch die von Sommerfeld und Voigt bekanntlich nur für die Halbebene aufgestellten Lösungen (A, Abschnitte V—VI). Damit ist zum ersten Male eine *Vereinheitlichung* der bestehenden Beugungstheorien und die Aufdeckung ihres Zusammenhanges erreicht worden. In B werden diese für die Schwingungsgleichung gewonnenen Resultate auf die Maxwellschen Gleichungen ausgedehnt, wodurch der schwarze Schirm mit der Maxwellschen Theorie in Einklang gebracht wird.

Bei der Behandlung des *ersten* Sprungwertproblems in A sind einige schon längst bekannte mathematische Eigenschaften der Kirchhoffschen Lösung benützt worden. In seinen Bemerkungen III stellt Hr. R. die Ableitung dieser mathematischen Eigenschaften als das Ziel meiner Arbeit A hin und erhebt, gestützt auf seine Arbeit I, in welcher er sich mit diesen Eigenschaften beschäftigt hatte, seine Prioritätsforderung.

In meiner Erwiderung C hatte ich darauf hingewiesen, daß diese Eigenschaften längst bekannt gewesen seien und ich auch bei allen von Hrn. R. angeführten Punkten meine Quellen angeführt habe. Ich habe weiter gezeigt, daß Hr. R., ungeachtet seiner Kenntnis dieser mathematischen Eigenschaften der Kirchhoffschen Lösung, noch immer an der bekannten, von Kirchhoff selbst herrührenden Auffassung dieser Lösung, die längst als unzulänglich erkannt wurde, festhält, was nicht nur aus seiner Arbeit I, sondern auch aus der späteren (II) folgt, daß daher Hr. R. von meiner in A, Abschnitt I—IV gegebenen *neuen* Auffassung der Beugung an schwarzen Schirmen weit entfernt ist. Das in A, Abschnitt V bis VI behandelte zweite Sprungwertproblem, welches sowohl die Kirchhoffsche als auch die Sommerfeld-Voigtsche Theorie umfaßt, wird von Hrn. R. überhaupt nicht berührt.

In seiner Antwort IV, 142 (letzter Absatz) gibt Hr. R. nunmehr ausdrücklich zu, daß sich seine Bemerkungen lediglich

auf meine mathematischen Betrachtungen beziehen. (Es handelt sich immer nur um die beim ersten Sprungwertproblem benützten mathematischen Eigenschaften der Kirchhoffschen Lösung.) Er hält gleichwohl daran fest, daß die von mir benützten mathematischen Sätze neue Entdeckungen von ihm und nicht von den bei mir angeführten Autoren sind. Ich muß daher zur Rechtfertigung, warum ich nur diese Autoren und nicht Hrn. R. angeführt habe, auf die von ihm behauptete Neuheit seiner in I gemachten Feststellungen dieser mathematischen Sätze eingehen.

2. Es handelt sich um folgende Eigenschaften der Kirchhoffschen Lösung:

a) Das von Kirchhoff über eine gewisse Fläche erstreckte Integral weist an dieser einen Sprung auf. Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus einem von Poincaré in seiner *Théorie mathématique de la lumière* 1889 (§§ 79,80) gegebenen Theorem, welches von ihm aus altbekannten einfachen Sätzen der Potentialtheorie abgeleitet wurde und etwa so ausgesprochen werden kann: Das Integral

$$J = \int X_1 \frac{e^{i a r}}{r} df + \int X_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i a r}}{r} \right) df$$

erstreckt über irgendeine Fläche f mit dem Element df und der (irgendwie orientierten) Normale n , wobei r die Entfernung vom Aufpunkt, X_1 , X_2 beliebige Funktionen bedeuten, hat beim Durchtritt durch die Fläche f folgende Unstetigkeiten: J erleidet einen Sprung um $-4\pi X_2$ (a. a. O. § 80), die normale Derivierte $\partial J / \partial n$ einen Sprung um $4\pi X_1$ (a. a. O. § 79). Diesen allgemeinen Satz wendet Poincaré § 84 auf das Kirchhoffsche Integral an, indem er (Fig. 1a und 1b auf folgender Seite) einen Teil (f_1) der z. B. als Kugel gedachten Fläche f als schwarzen Schirm ansieht, wobei er wie Kirchhoff auf dessen Schattenseite die Randwerte $X_1 = X_2 = 0$ ansetzt, während auf dem freien Rest f_2 der Fläche f die aus dem einfallenden Licht folgenden Werte für X_1 , X_2 gelten sollen. Hr. R. wendet nun IV, 140/1 ein, daß dies nicht das eigentliche von Kirchhoff und mir verwendete Integral sei, da dieses über die beleuchtete Oberfläche des schwarzen Schirms (f_1) und nicht über die Beugungsöffnung (f_2) erstreckt wird, daß man daher, um zur Tatsache des Sprunges an dieser Oberfläche zu gelangen, erst eine um-

ständige Schlußweise anwenden müsse. Dies ist unrichtig. Denn das von Kirchhoff verwendete Integral erhält man aus dem genannten allgemeinen Poincaréschen Integral J einfach durch Spezialisierung nach Fig. 1c anstatt nach 1b, indem man auf f_2 $X_1 = X_2 = 0$, auf f_1 X_1, X_2 entsprechend dem einfallenden Licht wählt. Demnach ist die Tatsache des Sprunges am schwarzen Schirm in dem genannten Poincaréschen Theorem als sofort abzulesender Spezialfall enthalten und kann nicht als neue Entdeckung bezeichnet werden.

Neu war hingegen die von mir an der betreffenden Stelle A, 411, wo das Poincarésche Theorem angeführt ist, gebrachte Ablehnung der Kirchhoff-Poincaréschen Auffassung der vorgenannten Werte von X_1, X_2 als *Randwerte*.

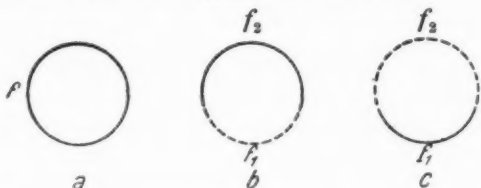


Fig. 1

b) Daß eine Funktion wie das Kirchhoffsche Integral, die an einer gewissen Fläche einen bestimmten Sprung aufweist, durch diese hindurch fortgesetzt, bei jedem Durchtritt durch diese Fläche sich um den Sprungwert vermehrt bzw. vermindert, kann wohl ebenfalls nicht als neue Entdeckung bezeichnet werden. Dies ist aber der ganze Inhalt der von Hrn. R. in I, § 3 gegebenen Darstellung der Kirchhoffschen Lösung in einem unendlich vielblättrigen Riemannschen Raume. Ich habe diese Darstellung nur einmal in A, 426 gestreift und für dieselbe eine mündliche Mitteilung des Hrn. Wirtinger als Quelle angegeben. (Ich verwende sonst überall die Kirchhoffsche Lösung in einem zweiblättrigen Riemannschen Raume.) Ich kann aber nicht zugeben, daß bei dieser Stelle Hr. R. hätte genannt werden müssen. Denn bei ihm fehlt die mir von Hrn. Wirtinger angegebene, ganz wesentliche physikalische Interpretation dieser selbstverständlichen Rechnung; diese Interpretation erklärt, warum trotz des Auftretens von unendlich vielen Lichtquellen in den nicht

physikalischen Räumen der Kirchhoffsche Schirm dennoch schwarz ist, dadurch, daß deren Einstrahlung in den physikalischen Raum sich durch Interferenz zerstört. Daß Hr. R. das Wesentliche an dieser neuen Erklärung auch jetzt noch entgeht, beweist deutlich die Stelle IV, 147 oben, wo er gegen Voigt und Wiegrefe polemisiert, die beide diejenigen Sommerfeld-Voigtschen Lösungen, welche nicht Vielfache von 2π zur Periode haben, als unbrauchbar bezeichnet haben, während Hr. R. solche Lösungen in I, § 7—8 als brauchbar und als Grundlage für einen „Vergleich“ der Sommerfeldschen und der Kirchhoffschen Beugungstheorie ansehen will. Voigt hat diese Lösungen darum abgelehnt, weil bei ihnen ∞ Lichtquellen in den nichtphysikalischen Räumen auftreten. Hr. R. beruft sich dagegen auf die obige, nicht von ihm, sondern von Hr. Wirtinger stammende Interpretation, übersieht aber dabei, daß in diesem Fall sich die Einstrahlung nicht durch Interferenz zerstören würde.

c) Maggi hat bekanntlich das von Kirchhoff über eine Fläche erstreckte Integral in ein Linienintegral über die Berandung dieser Fläche verwandelt. Dieselbe Transformation findet sich bei Hr. R. als Hauptresultat seiner Arbeit I, wobei er — und dies ist das einzige Neue gegenüber Maggi — eine physikalische Interpretation im Sinne Youngs anschließt. Ich habe darauf in A, 413, Fußnote, ausdrücklich hingewiesen. In II, 340 hat Hr. R. auch richtig Maggi angeführt, während in I Maggi nicht erwähnt wird. Dies ist der von mir in C 650 festgestellte Tatbestand und darin kann keineswegs, wie dies Hr. R. in IV, 153 auslegt, die Beschuldigung erblickt werden, als hätte er Maggi in I absichtlich nicht erwähnt. Es ist bemerkenswert, wie empfindlich Hr. R., der doch seinerseits verschiedene Prioritäten reklamiert, wird, sobald er auf eine von ihm übersehene Priorität aufmerksam gemacht wird.

In der Sache selbst reklamiert Hr. R. IV, 154 gegenüber Maggi, daß er eine andere Integrationsveränderliche gewählt habe! Außerdem aber gegenüber mir, daß ich eine von ihm entdeckte Substitution an einer Stelle, A 438, ohne Quellenangabe verwende. Es handelt sich auch hier um die Wahl der Integrationsveränderlichen! Wenn es überhaupt angeht, über derlei Dinge einen Prioritätsstreit abzuführen, so ist zu bemerken, daß auch diese Entdeckung des Hr. R. *nicht*

neu ist. Diese Substitution ist vielmehr in der Literatur der Beugung wohlbekannt. Ich verweise z. B. auf das Buch von H. Bateman, *Electrical and optical wave motion*, Cambridge 1915, 93, wo *dieselbe* Substitution für die Sommerfeldsche Lösung verwendet wird.

3. Vorstehendes beleuchtet wohl zur Genüge die von Hrn. R. behauptete Neuheit seiner Feststellungen gewisser mathematischer Eigenschaften der Kirchhoffschen Lösung. Ich muß aber noch einen Punkt kurz berühren. An der Stelle IV, 142, in welcher er nunmehr zugibt, daß sich seine Prioritätsforderung III nur auf meine mathematischen Betrachtungen bezog, erklärt er jetzt meine physikalischen Auffassungen für vollständig unhaltbar. Es ist ihm dabei das Übersehen unterlaufen, daß es Voigts Auffassungen sind, gegen die er sich hier wendet, auf denen ich an der von ihm herausgegriffenen Stelle — es handelt sich um die Fußnote A, 441 — aufbaue.

Voigt schreibt Gött. Nachr. 1899, S. 4: „Ist der mehrfache Raum durch seine Verzweigungskurven charakterisiert gedacht, so bleibt immer noch die Gestalt der durch sie umrandeten Verzweigungsschnitte, die als dünne schwarze Schirme gedeutet werden sollen, willkürlich, soweit nicht bei ihrer Wahl ein Widerspruch mit der Forderung entsteht, daß der Energiestrom immer aus dem physikalischen Raum R hinausfließen muß. Alle Schnitte, welche dieser Bedingung genügen, sind aber für das Beugungsproblem untereinander gleichwertig. Ja es bietet sich die Möglichkeit, statt eines einzigen *zwei verschiedene* Schnitte durch dieselbe Verzweigungskurve zu legen und den ganzen zwischen ihnen liegenden Teil von R als einen massiven schwarzen Körper zu betrachten. Die Lösung, die zunächst dem unendlich dünnen Schirm angepaßt war, muß dann auch die Beugung an jenem Körper darstellen.“

Nimmt man dazu die in Übereinstimmung mit den Beobachtungen (Wien, Maey u. a.) und mit allen Theorien (Kirchhoff-Maey, Sommerfeld) stehende Tatsache des Ursprungs der Beugungswelle an der Berandung des Schirms, so zeigt ein Blick auf Fig. 2a, b, in welcher ein vom Randpunkt R_1 herkommender „Strahl“ der Beugungswelle angedeutet ist, die Unhaltbarkeit der obigen Voigtschen Ausführungen sowohl für unendlich dünne (Fig. 2a) als für massive

Schirme (Fig. 2b) —, sofern, wie dies Hr. R. tut, der Austritt der Beugungswelle an der Schattenseite des schwarzen Schirms als Widerspruch zu der Schwärze desselben angesehen wird. Nur in Ausnahmefällen (unendlich dünne, ebene Schirme oder massiver, ebenflächiger Keil) wären die Voigtschen Ausführungen nicht mit sich selbst in Widerspruch. *Unrichtig* sind daher die *abschwächenden* Bemerkungen, die Hr. R. IV, 145, dieser IV, 143 gemachten Feststellung nachschickt: „Wenn uns auch die Feststellung der mathematischen Eigenschaften der Kirchhoffschen Lösung am beugenden Schirme zeigt, daß der Kirchhoffsche Schirm nicht in allen Fällen schwarz ist, so wird dadurch die Bedeutung der Kirchhoffschen Beugungstheorie keineswegs gemindert. In allen Fällen, wo der Verlauf der Schirme und der beugenden Kante gewissen Einschränkungen unterworfen wird, kann man den Kirchhoffschen Schirm als schwarz ansehen.“ Denn diese Fälle re-

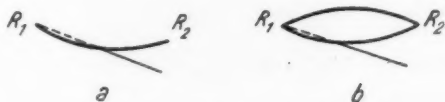


Fig. 2

duzieren sich auf die genannten Ausnahmefälle und der Kirchhoffsche Schirm wäre danach im allgemeinen überhaupt nicht schwarz.

Zur Aufklärung genügt es wohl, darauf hinzuweisen, daß Voigt selbst den ganz analogen Fall (Durchtritt der Beugungswelle an der Schattenseite des Schirms), der bei *allen* Voigt-Sommerfeldschen Lösungen mit Ausnahme der unendlich vielwertigen Lösung nach seiner Ansicht vorkommt, nicht als Aufhebung der Schwärze des Schirms, sondern als „geringeren Grad der Schwärze“¹⁾ angesehen hat, offenbar weil die hierbei auftretenden Energieströme von unendlich kleiner Größenordnung gegenüber dem einfallenden absorbierten Energiestrom sind. So sieht also die von Hrn. R. behauptete vollständige Unhaltbarkeit meiner (richtig: der Voigtschen) Auffassung aus.

1) A. Wiegrefe, Dissertation 1912, S. 13.

In Wirklichkeit hat natürlich die ganze Sache nichts mit *meiner* neuen Auffassung („der schwarze Schirm besteht aus Äther“) zu tun. Selbst wenn der Kirchhoffsche Schirm in den Fällen der Fig. 2a, 2b bei *gewissen Beugungswinkeln* nicht als schwarz (statt als schwarz von geringerem Grade) angesehen würde, würde dies höchstens das praktische Geltungsgebiet meiner Auffassung auf die genannten Ausnahmefälle, wo allein die Kirchhoffsche Beugungstheorie dann anwendbar, d. h. der Kirchhoffsche Schirm „absolut schwarz“¹⁾ wäre, *beschränken*, nicht aber ihre Grundlagen berühren.

Die vorstehenden Proben sind wohl hinreichend, um die Art, wie Hr. R. argumentiert, zu beleuchten, so daß ich auf eine weitere Auseinandersetzung mit ihm verzichten kann.

Zusammenfassung: Gegenüber der Forderung des Hrn. R., wonach außer gewissen von mir an einigen Stellen von A angeführten Autoren auch seine Arbeit I hätte genannt werden sollen, wird dargetan, daß diese Arbeit I in den betreffenden Punkten nichts Neues gebracht hat.

1) A. Wiegrefe, Dissertation 1912, S. 13.

(Eingegangen am 30. Oktober 1926)

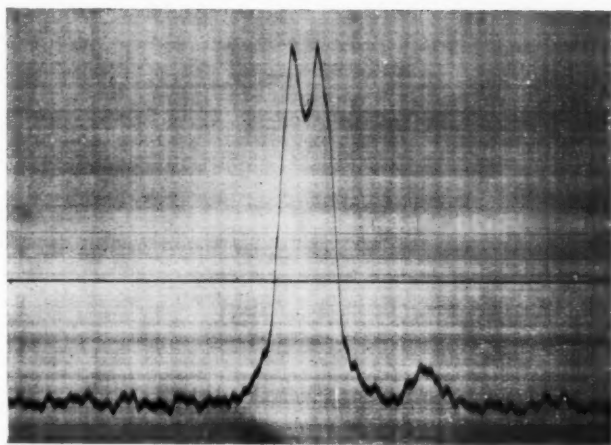


Fig. 3

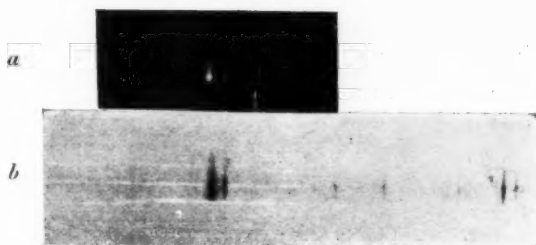


Fig. 4

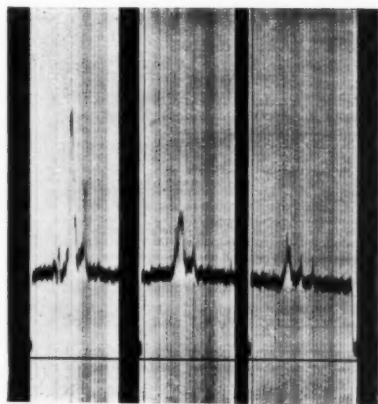
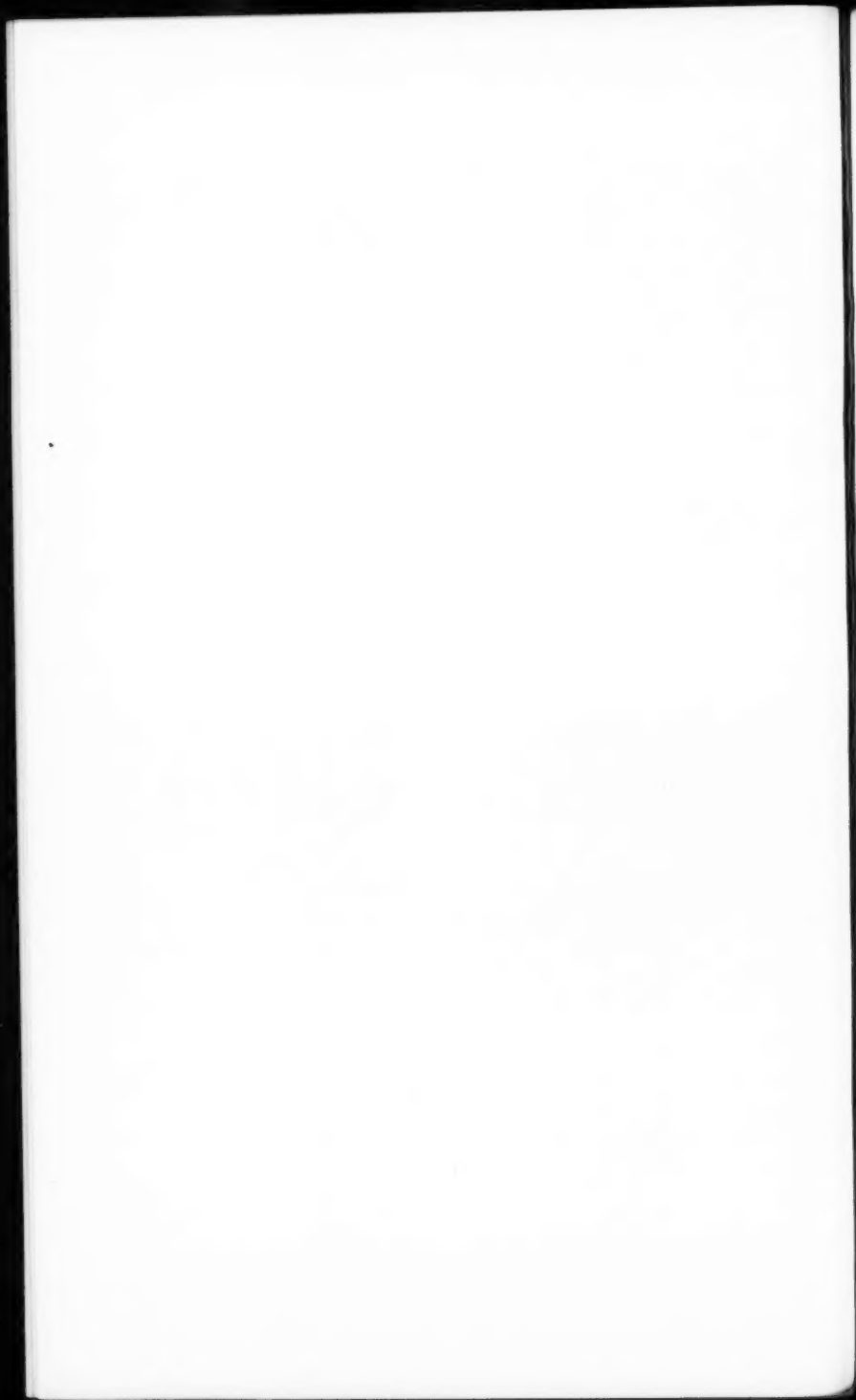


Fig. 7



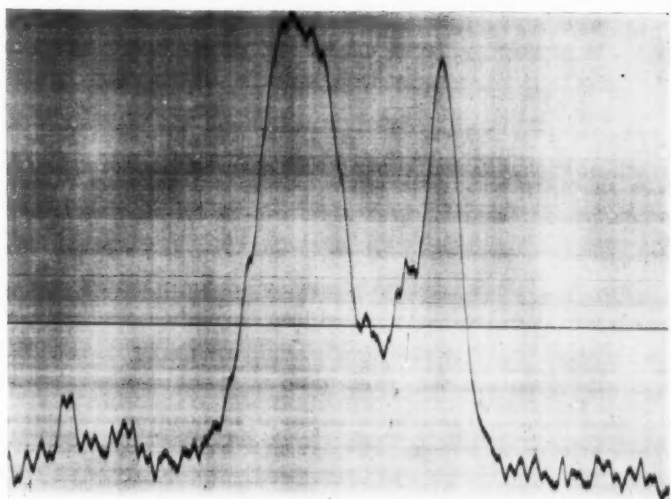


Fig. 6

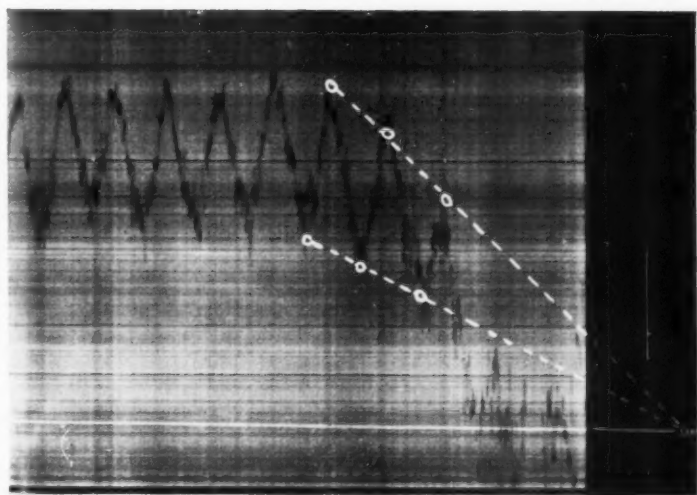


Fig. 14

W. Leo



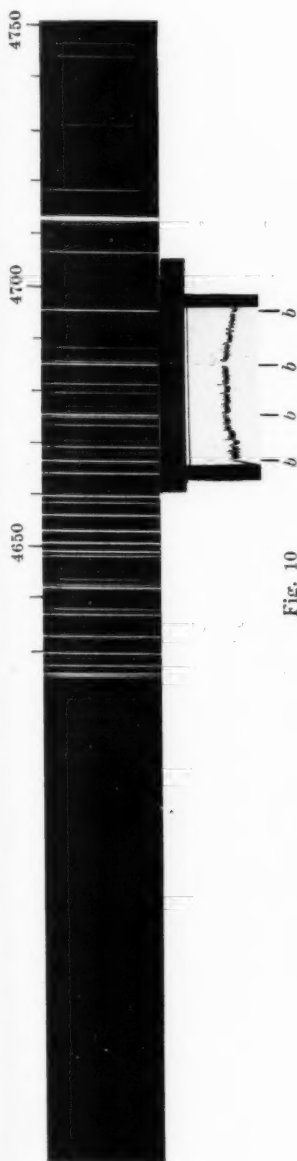


Fig. 10

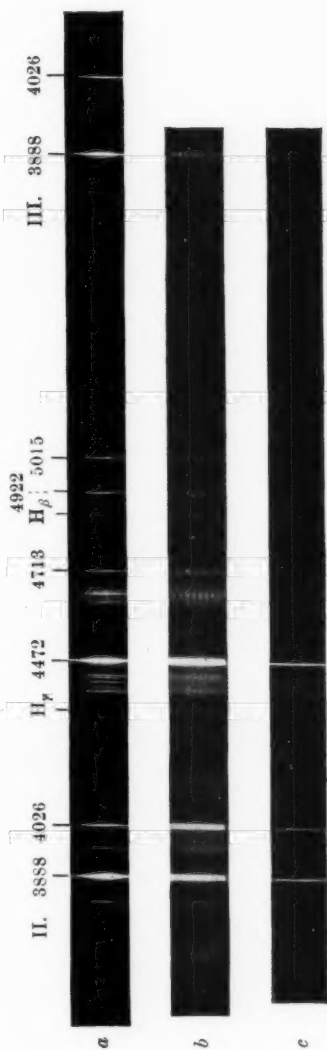
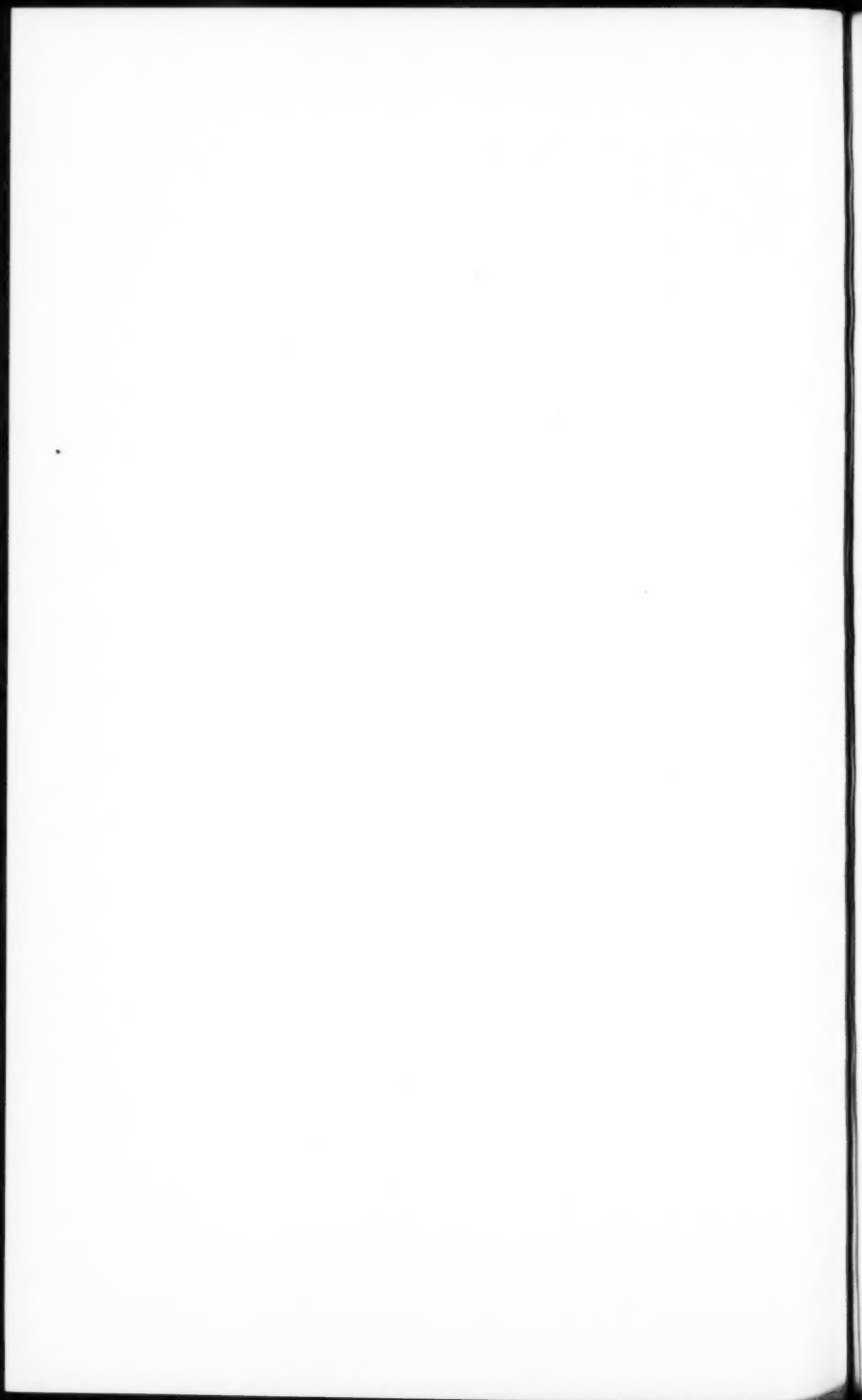


Fig. 13



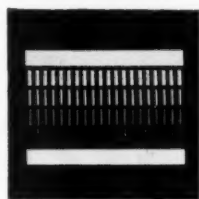
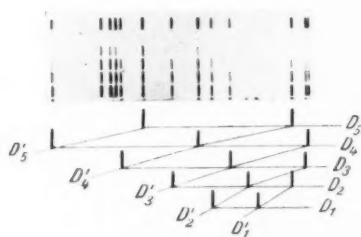


Fig. 2

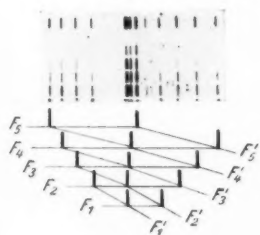
1



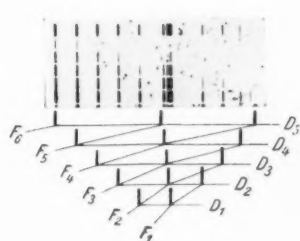
2



3



4



5



R. Frerichs